

*l'intégrale*

FORMULAIRE

**MPSI - MP - PSI**

---

DANIEL **FREDON**

LIONEL **PORCHERON**

MAGALI **DÉCOMBE VASSET**

DIDIER **MAGLOIRE**

# Le Formulaire MPSI - MP - PSI

DUNOD

## Conception et création de couverture : Atelier 3+

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-077136-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

Avant-propos	11
<b>Mathématiques</b>	<b>12</b>
<b>1. Analyse</b>	<b>12</b>
1.1 Les nombres réels	12
1.2 Continuité	12
1.3 Dérivation	13
1.4 Suites numériques	15
1.5 Intégration	16
1.6 Développements limités	20
1.7 Équations différentielles	22
1.8 Espaces vectoriels normés	26
1.9 Séries numériques	29
1.10 Suites et séries de fonctions	32
1.11 Calcul différentiel	36
<b>2. Algèbre générale</b>	<b>38</b>
2.1 Ensembles et applications	38
2.2 Relations	39
2.3 Calculs algébriques	40
2.4 Nombres complexes	41
2.5 Structures algébriques	42
2.6 Arithmétique	46
2.7 Polynômes	49
<b>3. Algèbre linéaire et multilinéaire</b>	<b>52</b>
3.1 Espaces vectoriels	52
3.2 Applications linéaires	56
3.3 Matrices, déterminants	58
3.4 Réduction des endomorphismes	61
3.5 Espaces vectoriels euclidiens	63

## 6 Table des matières

<b>4. Calcul des probabilités</b>	<b>68</b>
4.1 Événements et probabilités	68
4.2 Variables aléatoires	71
<b>Informatique</b>	<b>77</b>
<b>1. Environnement informatique</b>	<b>77</b>
<b>2. Algorithmique</b>	<b>78</b>
<b>3. Programmation en Python</b>	<b>79</b>
3.1 Généralités	79
3.2 Méthodes numériques	82
3.3 Algorithmique avancée	83
<b>4. Bases de données</b>	<b>85</b>
<b>Physique</b>	<b>89</b>
<b>1. Étude du signal</b>	<b>89</b>
1.1 Oscillateur harmonique non amorti (ressort horizontal)	89
1.2 Propagation du signal	90
1.3 Circuits électriques	93
<b>2. Électronique</b>	<b>102</b>
2.1 Stabilité des systèmes linéaires (PSI)	102
2.2 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction (PSI)	103
2.3 L'A.L.I. et la réaction positive (PSI)	106
2.4 Les oscillateurs (PSI)	109
2.5 L'échantillonnage	111
2.6 Filtrage numérique du signal	113
2.7 Introduction à la transmission des signaux	114
<b>3. Optique</b>	<b>116</b>
3.1 Optique géométrique	116
3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses (MP)	118
3.3 Déphasage et chemin optique (MP)	120
3.4 Les sources lumineuses (MP)	122
3.5 Les détecteurs de lumière (MP)	123
3.6 Superpositions d'ondes lumineuses (MP)	125
3.7 Interférences(MP)	126

<b>4. Mécanique</b>	128
4.1 Cinématique d'un point	128
4.2 Cinématique d'un solide	131
4.3 Dynamique du point - étude énergétique	132
4.4 Dynamique de particules chargées	136
4.5 Dynamique du solide - étude énergétique	137
4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative	140
4.7 Référentiels non galiléens - cinématique (MP)	143
4.8 Référentiels non galiléens - dynamique (MP)	145
4.9 Lois de Coulomb du frottement solide (MP)	147
<b>5. Mécanique des fluides (PSI)</b>	148
5.1 Fluides en écoulement	148
5.2 Écoulement incompressible et homogène	149
5.3 Bilans macroscopiques	151
<b>6. Thermodynamique</b>	153
6.1 Description d'un système à l'équilibre	153
6.2 Changement d'état d'un corps pur	154
6.3 Travail, transfert thermique et transformations	155
6.4 Premier et second principes	157
6.5 Machines thermiques	159
6.6 Systèmes ouverts	160
<b>7. Statique des fluides</b>	162
<b>8. Électromagnétisme</b>	164
8.1 Action d'un champ magnétique	164
8.2 Induction, auto-induction et couplage	166
8.3 Conversion de puissance électromécanique	168
8.4 Conservation de la charge électrique	169
8.5 Distributions de charge et champ électrostatique	172
8.6 Équations de Maxwell dans le vide	174
8.7 Propriétés du champ électrostatique	174
8.8 Champs électrostatiques de distributions particulières	177
8.9 Analogie pour le champ de gravitation	179
8.10 Dipôles électriques (MP)	180
8.11 Champs magnétostatiques	183
8.12 Dipôles magnétiques	186
8.13 L'approximation des régimes quasi stationnaires	188

## 8 Table des matières

<b>9. Milieux ferromagnétiques (PSI)</b>	190
9.1 Description	190
9.2 Circuits magnétiques	192
<b>10. Ondes électromagnétiques</b>	194
10.1 Les équations de propagation des champs	194
10.2 Énergie du champ électromagnétique	195
10.3 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques	196
10.4 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma	197
10.5 Champ électromagnétique dans le plasma	199
10.6 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique	200
<b>11. Ondes mécaniques (PSI)</b>	203
11.1 Ondes sur une corde	203
11.2 Ondes acoustiques	204
<b>12. Mécanique quantique (MP)</b>	207
<b>13. Éléments de physique statistique (MP)</b>	212
13.1 Le facteur de Boltzmann	212
13.2 Statistique sur le système	214
13.3 Équipartition de l'énergie	215
<b>14. Conversions de puissances (PSI)</b>	217
14.1 Conversion statique	217
14.2 Conversion électro-mécanique	219
<b>Chimie</b>	225
<b>1. Thermodynamique</b>	225
1.1 États de la matière	225
1.2 Description d'un système physico-chimique	227
1.3 Étude thermodynamique d'une transformation	229
1.4 Diagrammes binaires (PSI)	231
1.5 Application du premier principe à la transformation chimique	233
1.6 Application du second principe à la transformation chimique	234
<b>2. Cinétique</b>	238
2.1 Cinétique formelle	238
2.2 Mécanismes réactionnels	241

<b>3. Architecture de la matière</b>	242
3.1 Classification périodique des éléments	242
3.2 Édifices chimiques	245
<b>4. État solide</b>	248
4.1 Modèle du cristal parfait	248
4.2 Types de cristaux	250
<b>5. Solutions aqueuses</b>	251
5.1 Réaction d'oxydo-réduction	251
5.2 Réaction acido-basique	254
5.3 Réaction de complexion	255
5.4 Réaction de précipitation	257
5.5 Diagrammes potentiel-pH et potentiel-pL	257
<b>6. Électrochimie</b>	258
6.1 Courbes intensité - potentiel	258
6.2 Corrosion	260
6.3 Conversion et stockage d'énergie	261
<b>Annexe A : Formulaire de trigonométrie</b>	262
1. Angles associés	262
2. Formules d'addition	262
3. Formules de duplication	262
4. Formules de linéarisation	263
5. Transformation de sommes en produits	263
6. Expressions en fonction de $\tan \frac{a}{2}$	263
7. Équations trigonométriques	263
<b>Annexe B : Champs scalaires - champs vectoriels</b>	265
1. Coordonnées cartésiennes	265
2. Propriétés	265
3. Coordonnées cylindriques	266
4. Coordonnées sphériques	267

<b>Annexe C : Unités et constantes fondamentales</b>	268
1. Unités du système international	268
2. Constantes fondamentales	269
3. Ordres de grandeur	270
<b>Annexe D : Séries de Fourier des signaux classiques</b>	271
1. Signal 1 : rampe	271
2. Signal 2 : triangle	271
3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)	271
4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)	271
5. Signal 5 : porte	272
6. Signal 6 : impulsion	272
<b>Annexe E : Classification périodique</b>	273
<b>Annexe F : Constantes chimiques</b>	276
1. Constantes acido-basiques	276
2. Potentiels standards redox	277
3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés	278
<b>Index des mathématiques</b>	279
<b>Index de la physique</b>	282
<b>Index de la chimie</b>	287

# Avant-propos

Ce nouveau formulaire reprend la présentation et les objectifs des anciens formulaires conçus par Lionel Porcheron. Mais il a été entièrement réécrit pour s'adapter aux nouveaux programmes, avec des auteurs nouveaux, et donc des choix nouveaux.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de MPSI, puis de MP ou PSI. Pour chaque item, vous trouverez :

- la mention **①** ou **②** qui indique si c'est une notion de première année ou de deuxième année ;
- parfois la mention **MP** ou **PSI** pour indiquer une notion réservée à une seule section.

Le livre est scindé en quatre parties : mathématiques, informatique, physique, chimie. Dans chaque partie, vous trouverez l'essentiel du cours, les principaux résultats étant mis en valeur par un support tramé.

À la fin, un index très détaillé vous permettra d'accéder très vite à la notion que vous voulez réviser.

Des annexes font le bilan d'informations essentielles et parfois dispersées dans votre cours.

Ne vous trompez pas dans l'offre Dunod. Vous trouverez des livres de cours et d'exercices pour renforcer votre travail de classe.

Pour des révisions structurées, les Tout-en-fiches par classes (MPSI, MP, PSI) de la collection « J'assure » comportent l'essentiel du cours et quelques exercices d'entraînement.

Ce livre est un outil pédagogique adapté aux révisions rapides avant un devoir. C'est aussi un puissant remède contre l'anxiété du trou de mémoire. C'est en quelque sorte un anxiolytique sans risque sanitaire. Mais vous risquez l'accoutumance : quand vous aurez commencé à vous servir de ce livre, vous ne pourrez plus vous en passer, surtout à l'approche des concours (qui portent sur les deux années de prépa n'oubliez pas).

Un grand merci à Thomas Fredon et Roger Faure pour leur soutien technique indispensable et à Matthieu Daniel, puis à Jean-Luc Blanc et Brice Martin, pour la réalisation finale.

Pour cette sixième édition, nous avons éliminé les quelques erreurs de « copier-coller » qui avaient échappé à notre attention. À la demande de lecteurs, nous avons aussi rajouté deux annexes : formulaire de trigonométrie et séries de Fourier des signaux classiques. Ce qui montre que vos commentaires et suggestions sont les bienvenus.

Daniel FREDON

daniel.fredon@laposte.net

# Mathématiques

## 1. Analyse

### 1.1 Les nombres réels

#### ① Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Une partie  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si tout réel est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .

#### ① Borne supérieure

La borne supérieure de  $A$  est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de  $A$ .

$M = \sup A$  si :

$$\forall x \in A \quad x \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x.$$

### 1.2 Continuité

#### ① Continuité : définition

$f$  est continue en  $a$  si elle est définie en  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### ① Théorème des valeurs intermédiaires

Si  $f$  est continue, pour tout  $y$  tel que  $f(a) < y < f(b)$ , il existe  $c$  tel que  $y = f(c)$ .

En particulier, si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[a; b]$ .

#### ① Continuité sur un segment

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

### 1.3 Dérivation

#### 1 Dérivée en un point

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  et  $x_0$  un élément de  $D$  tel que  $f$  soit définie au voisinage de  $x_0$ . On appelle dérivée de  $f$  au point  $x_0$  le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

#### 1 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n \ (n \neq 0)$	$nx^{n-1}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$e^x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

#### 1 Dérivée d'une fonction réciproque

La fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$  et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

$f$  est strictement monotone sur  $I$ , dérivable en  $f(x_0)$  et  $f'(x_0) \neq 0$ .

#### 1 Théorème de Rolle

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et telle que  $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**① Égalité des accroissements finis**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème ne se prolonge pas aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

**① Inégalité des accroissements finis**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ .

Si  $m \leq f' \leq M$ , alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En particulier, si  $|f'| \leq K$ , alors, pour tous  $x$  et  $x'$  de  $]a, b[$ ,

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|.$$

**① Limite de la dérivée**

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , et si  $f'$  a une limite finie  $l$  en  $a$ , alors  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'_d(a) = l$ .

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que  $f'_d(a)$  existe sans que  $f'$  ait une limite en  $a$ .

**② MP Fonction convexe**

$f$  est convexe sur  $I$  :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

$$x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Le graphique de toute fonction convexe est au-dessous de chacune de ses cordes.

**② MP Fonction convexe dérivable**

Si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$  :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \geq 0$$

Le graphique de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

**2 MP Inégalités dues à la convexité**

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+ \quad p > 0, q > 0 \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Si  $p = q = 2$ , il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Minkowski

$$\left[ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \sum_{i=1}^n a_i^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \sum_{i=1}^n b_i^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

**1.4 Suites numériques**

**1 Suite convergente**

La suite  $(u_n)$  est convergente vers  $l$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

**1 Théorème d'encadrement**

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq x_n \leq v_n$  et si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite  $l$ , alors la suite  $(x_n)$  est convergente vers  $l$ .

**1 Suite extraite**

La suite  $(v_n)$  est extraite de la suite  $(u_n)$  s'il existe une application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , strictement croissante, telle que  $v_n = u_{\varphi(n)}$ .

On dit aussi que  $(v_n)$  est une sous-suite de  $(u_n)$ .

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), toute sous-suite possède la même limite.

## ① Théorème de la limite monotone

Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.

Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .

Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers  $-\infty$ .

## ① Suites adjacentes

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si :

$(u_n)$  est croissante ;

$(v_n)$  est décroissante ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Variante

Si  $(u_n)$  croissante,  $(v_n)$  décroissante et  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$ , alors elles convergent vers  $l_1$  et  $l_2$ . Il reste à montrer que  $l_1 = l_2$  pour qu'elles soient adjacentes.

## 1.5 Intégration

### ① Valeur absolue

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

### ① Intégrales et ordre

- Si  $a < b$ , et si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors :  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .
- Si  $f$  est continue et positive sur  $[a, b]$ , on a :

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \iff \forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

### ① Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)| dx.$$

**1 Sommes de Riemann**

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Les sommes de Riemann, dont on considère la limite, sont des sommes d'aires de rectangles.

**1 Intégration par parties**

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt.$$

$u$  et  $v$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$ , et  $a$  et  $b$  des réels de  $I$ .

**1 Intégration par changement de variable**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx.$$

$u$  de classe  $C^1$  de  $[\alpha, \beta]$  dans  $[a, b]$ , et  $f$  continue sur  $[a, b]$ .

**1 Formule de Taylor avec reste intégral**

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ ,  $x_0$  et  $x$  des points de  $I$ . On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

où  $P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$

est l'approximation de Taylor à l'ordre  $n$  ;

et  $R_n(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$  est le reste intégral d'ordre  $n$ .

**2 Fonction intégrable**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \text{ existe}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt \text{ converge} \quad \left| \quad f \text{ intégrable sur } [a, +\infty[ \right.$$

$$\int_a^b |f(t)| dt \text{ converge} \quad \left| \quad f \text{ intégrable sur } [a, b] \right.$$

## ② Règles d'intégrabilité (fonctions positives)

### • Comparaison

Supposons  $0 \leq f \leq g$  sur  $[a, +\infty[$ .

– Si  $g$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

– Si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $g$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ .

### • Domination

Si  $f(x) = O_{+\infty}(g(x))$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  implique celle de  $f$ .

### • Équivalence

Si  $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ , l'intégrabilité de  $g$  sur  $[a, +\infty[$  équivaut à celle de  $f$ .

## ② Situations de référence

• Pour  $a > 0$ ,  $\frac{1}{x^\alpha}$  intégrable sur  $[a, +\infty[ \iff \alpha > 1$ .

• Pour  $\alpha > 0$ ,  $e^{-\alpha x}$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

•  $\frac{1}{x^\alpha}$  intégrable sur  $]0, a]$   $\iff \alpha < 1$ .

•  $\ln x$  intégrable sur  $]0, 1]$ .

## ② Théorème de convergence dominée

Les fonctions  $f_n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , sont continues par morceaux sur  $I$  ;

la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$  ;

il existe une fonction  $g$  continue par morceaux sur  $I$ , positive et intégrable sur  $I$ , telle que, pour tout entier  $n$ , on ait  $|f_n| \leq g$  (hypothèse de domination),

$\implies$  les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  et

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n.$$

**② Théorème de sommation  $L^1$**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux et intégrables sur  $I$ , telle que la série  $\sum f_n$  converge simplement vers  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et telle que la série  $\sum \int_I |f_n|$  converge.

$\implies f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

**② Intégrales à paramètre (existence et continuité)**

On considère  $A$  une partie d'un espace normé de dimension finie,

$I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,

$f$  une fonction définie sur  $A \times I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $f$  est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde.

On suppose également qu'il existe une fonction  $\varphi$ , intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , telle que, pour tout  $x$  de  $A$ , on ait  $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$ , c'est-à-dire :

$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction  $x \mapsto g(x) = \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$ .

**② Intégrales à paramètre (dérivabilité)**

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $J \times I$ . On suppose :

- $f$  est continue par morceaux par rapport à la seconde variable,
- pour tout  $x$  de  $J$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}$  est définie sur  $J \times I$ , continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde,
- il existe une fonction  $\varphi$  intégrable sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que, pour tout  $x$  de  $J$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$ .

Alors la fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $J$  et vérifie :

$$\forall x \in J \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

**2 Transformation de Laplace**

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

pour  $\text{Re}(p) > a$

$f$  fonction causale, soit  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$

$a$  abscisse d'intégrabilité de  $f$

**2 Propriétés de la transformation de Laplace**

Linéarité

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](p) \\ = \lambda_1 \mathcal{L}[f_1](p) + \lambda_2 \mathcal{L}[f_2](p). \end{aligned}$$

Retard sur la fonction

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](p) = e^{-t_0 p} \mathcal{L}[f](p).$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}[f](x) = f(0^+).$$

Changement d'échelle

$$\mathcal{L}[f(kt)](p) = \frac{1}{k} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right)$$

avec  $k > 0$ .

Retard sur la transformée

$$\mathcal{L}[f](p - p_0) = \mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)](p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}[f](x) = l.$$

**1.6 Développements limités**

**1 Formule de Taylor-Young**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  jusqu'à l'ordre  $n$ . Alors la fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

## 1 Développements limités usuels

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

## 1.7 Équations différentielles

**1 Équations différentielles linéaires du premier ordre**

De la forme :

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

Équation homogène associée :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2)$$

Solution générale de (1)  
 = Solution générale  $y_S$  de (2)  
 + Solution particulière de (1)

**1 Résolution de l'équation homogène (2)**

Les solutions de l'équation (2) sont du type :

$$y_S(x) = K e^{-A(x)} \quad \text{où} \quad A(x) = \int_{t_0}^x a(u) du \text{ est une primitive de } a(x)$$

avec  $K$  constante arbitraire et  $x_0$  élément quelconque de  $I$ .**1 Recherche d'une solution particulière de (1)**

$y_1$  étant une solution non nulle de (2), on introduit une fonction auxiliaire inconnue  $K(x)$  telle que  $y(x) = K(x)y_1(x)$  soit solution de (1).

Ceci conduit à  $K'(x) = \frac{b(x)}{y_1(x)}$  et permet de calculer  $K(x)$  puis  $y(x)$ .

Cette méthode s'appelle aussi méthode de variation de la constante.

**1 Équations du second ordre à coefficients constants**

De la forme :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (1)$$

Équation homogène associée :

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2)$$

Solution générale de (1)  
 = Solution générale  $y_S$  de (2)  
 + Solution particulière de (1)

**1 Résolution de l'équation homogène (2)**

- $\Delta > 0$  deux racines  $r_1$  et  $r_2$ .

$$y_S(x) = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

- $\Delta = 0$  une racine double  $r_0$ .

$$y_S(x) = (K_1 x + K_2) e^{r_0 x}$$

- $\Delta < 0$  deux racines  $\alpha \pm i\beta$ .

$$y_S(x) = e^{\alpha x} (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x)$$

Cas  $a, b, c$  réels.

Équation caractéristique :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

$$\Delta = a^2 - 4b.$$

$K_1$  et  $K_2$  sont des constantes réelles quelconques.

**1 Recherche d'une solution particulière de (1)**

- **Cas où  $f(x)$  est un polynôme  $P(x)$  de degré  $n$**

Il existe une solution particulière de (1) sous la forme d'un polynôme de degré :

$$\begin{aligned} n & \text{ si } b \neq 0; \\ n + 1 & \text{ si } b = 0 \text{ et } a \neq 0; \\ n + 2 & \text{ si } a = b = 0. \end{aligned}$$

La recherche de cette solution se fait par identification.

- **Cas où  $f(x) = e^{kx} P(x)$  avec  $P$  polynôme et  $k$  constante**

On effectue le changement de fonction inconnue

$$y(x) = e^{kx} z(x)$$

où  $z$  est une nouvelle fonction inconnue.

En reportant  $y, y'$  et  $y''$  dans (1), on est conduit à une équation en  $z$  du type précédent.

- **Cas où  $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x P(x)$  ou  $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x P(x)$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels, et  $P$  polynôme à coefficients réels**

On cherche une solution particulière (à valeurs complexes) obtenue pour l'équation de second membre  $e^{(\alpha+i\beta)x} P(x)$ .

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution ainsi obtenue.

## ② MP Équation différentielle linéaire

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad (1)$$

$a$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $b$  une application continue de  $I$  dans  $E$ .

$$x'(t) = a(t)x(t) \quad (2)$$

Équation homogène associée

## ② PSI Équation différentielle linéaire

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (1).$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (2).$$

## ② Système différentiel d'ordre $n$

$$(S) \begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1p}x_p(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ x_p'(t) &= a_{p1}x_1(t) + \cdots + a_{pp}x_p(t) + b_p(t) \end{cases}$$

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad (1).$$

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (2).$$

## ② Solutions d'une équation différentielle linéaire

La solution générale de (1) est la somme de la solution générale de (2) et d'une solution particulière de (1).

## ② MP Variation de la constante

Si  $x_1$  est une solution de (2), ne s'annulant pas sur  $I$ , on peut chercher les solutions de (1) sous la forme :

$$x(t) = u(t)x_1(t)$$

où  $u$  est une fonction inconnue qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en  $u'$  obtenue en reportant dans (1).

**② MP    Système fondamental de solutions (n=2)**

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux solutions linéairement indépendantes de (2), on peut chercher la solution de (1) sous la forme :

$$x(t) = u(t) x_1(t) + v(t) x_2(t)$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions inconnues soumises à la condition :

$$u'(t) x_1(t) + v'(t) x_2(t) = 0 .$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u' x_1 + v' x_2 = 0 \\ u' x_1' + v' x_2' = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé wronskien de  $x_1$  et  $x_2$ , ne s'annule pas sur  $I$  lorsque  $x_1$  et  $x_2$  sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = - \frac{x_2(t) f(t)}{w(t)} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{x_1(t) f(t)}{w(t)} .$$

**② MP    Exponentielle d'une matrice**

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

convergence normale sur tout compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Propriétés algébriques**

$$e^0 = I_n \quad ; \quad e^{\alpha A} e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A} \quad ; \quad e^A e^{-A} = I_n \quad ; \quad \det(e^A) = e^{\text{tr}A} .$$

$$\text{Si } AB = BA \quad e^A e^B = e^{A+B} \quad ; \quad \text{Si } P \text{ inversible, } e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1} .$$

**Dérivabilité**

L'application  $t \mapsto e^{tA}$  est dérivable et a pour dérivée  $Ae^{tA}$ .

**Utilisation**

En multipliant par  $e^{-At}$  les deux membres de  $X'(t) = AX(t) + B(t)$ , on se ramène à :

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} X(t)] = e^{-At} B(t) .$$

## ② Résolution d'un système à coefficients constants cas A diagonalisable

Soit  $A$  diagonalisable ; notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses valeurs propres et  $V_1, \dots, V_p$  des vecteurs propres associés.

• L'espace vectoriel des solutions du système homogène ( $S'$ ) admet pour base :

$$(V_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, V_p e^{\lambda_p t}).$$

• On a  $A = PDP^{-1}$  où  $D$  est diagonale.

Si l'on pose  $Y(t) = P^{-1}X(t)$  et  $C(t) = P^{-1}B(t)$ , le système ( $S$ ) s'écrit :

$$Y'(t) = DY(t) + C(t).$$

On résout ce système réduit et on en déduit  $X(t) = PY(t)$ .

## 1.8 Espaces vectoriels normés

### ② Norme

Une norme sur  $E$  est une application  $N$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

$$(1) \quad \forall x \in E \quad N(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0$$

$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

$$(3) \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

### ② MP Normes équivalentes

Il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que  $\forall x \in E$  :  
 $\alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x).$  | Toute suite qui converge vers  $l$  pour une norme converge aussi vers  $l$  pour l'autre norme.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

### ② Voisinage

Une partie  $V$  est un voisinage de  $a \in E$  s'il existe une boule ouverte centrée en  $a$  et incluse dans  $V$ .

②

## Ouvert

• Une partie  $A$  de  $E$  est ouverte (ou est un ouvert) si elle est au voisinage de chacun de ses points, ce qui s'écrit :

$$\forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B(a, r_a) \subset A.$$

• Un point  $a$  est un point intérieur de  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $a$ .

L'ensemble des points intérieurs de  $A$  est l'intérieur  $\overset{\circ}{A}$  de  $A$ . On a  $\overset{\circ}{A} \subset A$ .

• La réunion d'une famille quelconque d'ouverts, l'intersection d'une famille finie d'ouverts sont des ouverts.

②

## Fermé

• Une partie  $A$  est fermée (ou est un fermé) si son complémentaire est un ouvert.

•  $a$  est un point adhérent à  $A$  si toute boule  $B(a, r)$ , avec  $r > 0$ , contient un point de  $A$ . L'ensemble des points adhérents à  $A$  est l'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$ . On a  $A \subset \overline{A}$ . Si  $\overline{A} = E$ , on dit que  $A$  est dense dans  $E$ .

• Une partie  $A$  est fermée si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de  $A$  qui converge dans  $E$ , la limite appartient à  $A$ .

• L'intersection d'une famille quelconque de fermés, la réunion d'une famille finie de fermés sont des fermés.

②

## Frontière

La frontière d'une partie  $A$  est l'ensemble  $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .

C'est l'ensemble des points  $a$  tels que toute boule  $B(a, r)$  avec  $r > 0$  contient au moins un vecteur de  $A$  et un vecteur qui n'appartient pas à  $A$ .

②

## Caractérisation séquentielle de la continuité

Pour que  $f$  soit continue en  $a$ , il faut et il suffit que, pour toute suite  $(u_n)$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  converge vers  $f(a)$ .

②

## MP Caractérisation topologique de la continuité

$f$  est continue sur  $D$  si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de  $F$  est un ouvert (resp. fermé) de  $E$ .

**② Fonction lipchitzienne**

- Une fonction  $f$  de  $D$  dans  $F$  est lipschitzienne de rapport  $k \geq 0$  si :  

$$\forall x \in D \quad \forall y \in D \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\|.$$
- Si  $0 < k < 1$ , on dit que  $f$  est contractante.

**② MP Continuité uniforme**

- $f$  de  $D \subset E$  dans  $F$  est uniformément continue sur  $D$  si :  

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D \quad \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$
- Si  $f$  est lipschitzienne sur  $D$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $D$ .

**② MP Application linéaire continue**

- Si  $f$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ , les propositions suivantes sont équivalentes :
  - $f$  est continue sur  $E$  ;
  - $f$  est continue en  $0$  ;
  - $f$  est uniformément continue ;
  - $\exists k \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq k \|x\|.$
- Si  $E$  est de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.

**② MP Compact**

- Une partie  $A$  de  $E$  est une partie compacte ou est un compact si, de toute suite d'éléments de  $A$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $A$ .
- Un fermé inclus dans un compact est un compact.
- Tout compact est fermé et borné.
- Si  $E$  est de dimension finie, on a :  

$$A \text{ compact} \iff A \text{ fermé et borné.}$$

**② MP Fonction continue sur un compact**

- Soit  $f$  une fonction continue de  $E$  dans  $F$  et  $A$  un compact de  $E$ .
- $f$  est uniformément continue sur  $A$  (théorème de Heine).
  - $f(A)$  est un compact de  $F$ .

**2 MP**      **Partie connexe par arcs**

- Une partie  $A$  de  $E$  est connexe par arcs si, pour tout  $(a, b) \in A^2$ , il existe une fonction continue  $f$  de  $[0, 1]$  dans  $A$  telle que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ .
- Si  $A$  est connexe par arcs et  $f$  continue, alors  $f(A)$  est connexe par arcs.
- Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.
- **Théorème des valeurs intermédiaires**  
Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, continue sur une partie connexe,  $a$  et  $b$  deux vecteurs de  $A$ .  
Pour tout réel  $x$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe  $c \in A$  tel que  $x = f(c)$ .

**1.9 Séries numériques**

**1**      **Série : convergence**

Une série  $\sum u_n$  converge si la suite  
 $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  converge.

Une suite  $(u_n)$  converge  $\iff$  la  
série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

**1**      **Convergence absolue**

Si  $\sum |u_n|$  converge, on dit que  $\sum u_n$   
est absolument convergente.

Si une série est absolument conver-  
gente, alors elle est convergente ;  
mais la réciproque est fausse.

**1**      **Comparaison de deux séries à termes positifs**

$\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge ;  
 $\sum u_n$  diverge  $\implies \sum v_n$  diverge.

Si  $0 \leq u_n \leq v_n$  à partir d'un certain  
rang.

**1 Cas de deux séries à termes positifs équivalentes**

Si  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ , les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.

Ce théorème n'est pas vrai pour des séries qui ne sont pas de signe constant.

**1 Séries de Riemann**

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

**1 - 2 Séries géométriques**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} az^n = a \frac{1}{1-z}.$$

$a \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$   
convergence (absolue) si, et seulement si,  $|z| < 1$

**2 Série exponentielle**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$z \in \mathbb{C}$

**2 Règle de d'Alembert**

Soit  $u_n$  une série à termes strictement positifs telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  admette une limite  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Si  $l < 1$ , la série converge ; si  $l > 1$ , la série diverge.

**2 Comparaison série-intégrale**

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux et décroissante de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ , alors la série de terme général  $\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$  converge.

**2 Série alternée**

En supposant  $u_0 \geq 0$ , une série alternée a pour terme général  $u_n = (-1)^n a_n$  où  $a_n = |u_n|$ .

Critère spécial des séries alternées

Si la suite de termes positifs  $(a_n)$  est décroissante et converge vers 0, alors

- la série alternée  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$  est convergente ;
- le reste  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$  est du signe de  $(-1)^{n+1}$  et vérifie :

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$

**2 MP Famille sommable**

La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si, pour tout  $n$ , la série

$$\sum_m a_{m,n} \text{ converge et la série } \sum_n \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right).$$

**2 Produit de Cauchy**

- Le produit de Cauchy de deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  est la série de terme général :  $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ .

- Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes, alors la série  $\sum w_n$  l'est aussi et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

### 1.10 Suites et séries de fonctions

#### ② Convergence simple d'une suite de fonctions

La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $A$  vers une fonction  $f$ , de  $A$  dans  $F$ , si :

$$\forall x \in A \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

$\|\cdot\|$  est la norme dans  $A$

#### ② Convergence uniforme d'une suite de fonctions

La suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur  $I$  si :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

Convergence uniforme  $\implies$  convergence simple.

#### ② Continuité de la limite

- Si la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ , et si chaque  $f_n$  est continue sur  $A$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ .
- Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout compact inclus dans  $A$ , pour que  $f$  soit continue sur  $A$ .

#### ② Intégration de la limite

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $F$ , et  $a$  un point de  $I$ .

On suppose que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $u$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in I$ , on note :  $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$  et  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

Alors  $(F_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $F$  sur tout segment de  $I$ .

#### ② Dérivation de la limite

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions de classe  $C^1$  définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $F$ . On suppose que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ , que  $(f'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g$ . Alors :

$(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment,  
 $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$   
 et  $f' = g$ .

## ② Convergence simple d'une série de fonctions

On dit que la série  $\sum_n f_n$  converge simplement sur  $I$  si la suite  $(S_n = \sum_{k=0}^n f_k)$  converge simplement et on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x).$$

## ② Convergence uniforme d'une série de fonctions

- La série  $\sum_n f_n$  converge uniformément sur  $I$  si la suite  $(S_n)$  converge uniformément sur  $I$ .
- Si  $\sum_n f_n$  converge uniformément sur  $I$  :
  - Si les  $f_n$  sont continues sur  $I$ , alors la somme  $S$  est continue sur  $I$ .
  - Si les  $f_n$  sont continues dans  $I$  et si  $\sum_n f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors, pour tous  $a$  et  $b$  dans  $I$ , on a :

$$\int_a^b \left( \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \int_a^b u_k(x) dx \right)$$

- Si les  $u_n$  sont de classe  $C^1$  dans  $I$  et si  $\sum_n f'_n$  converge uniformément, alors la somme  $S$  est de classe  $C^1$  et vérifie :

$$\forall x \in I \quad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x).$$

## ② Convergence normale d'une série de fonctions

- La série  $\sum_n f_n$  converge normalement sur  $I$  si la série des normes  $\sum_n \|f_n\|_I$  converge.

## 34 [1] Mathématiques

- La série  $\sum_n f_n$  converge normalement sur  $I$  si, et seulement si, il existe une série numérique à termes positifs  $a_n$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$

- La convergence normale de  $\sum_n f_n$  entraîne la convergence uniforme de  $\sum_n f_n$  et, pour tout  $x \in I$ , la convergence absolue de  $\sum_n f_n(x)$ .

### ② Série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$z$  variable réelle ou complexe,  
 $a_n$  constantes réelles ou complexes,  
 $S(z)$  somme de la série entière

### ② Lemme d'Abel

Si la suite  $(|a_n| r^n)$  est bornée, alors la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  converge absolument pour tout  $z$  tel que  $|z| < r$ .

### ② Rayon de convergence

Le rayon de convergence  $R$  est la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}$  des ensembles :

$$\{r \in \mathbb{R}_+ ; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \text{ converge}\} \quad ; \quad \{r \in \mathbb{R}_+ ; |a_n| r^n \text{ borné}\}.$$

La convergence est normale, donc uniforme, sur tout compact inclus dans  $B(0, R)$ .

### ② Opérations algébriques

Soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$  deux séries entières, de rayons de convergence respectifs  $R_1$  et  $R_2$ , et de sommes respectives  $f(z)$  et  $g(z)$ .

• Linéarité

Pour tous  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$  a pour somme  $\alpha f(z) + \beta g(z)$  ; son rayon de convergence  $R$  est tel que :

$$R = \min(R_1, R_2) \quad \text{si } R_1 \neq R_2$$

$$R \geq R_1 \quad \text{si } R_1 = R_2$$

• Produit de Cauchy de deux séries entières

Si l'on pose :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$  a pour somme  $f(z)g(z)$ . Son rayon de convergence  $R$  est tel que  $R \geq \min(R_1, R_2)$ .

**2 Série entière d'une variable réelle**

Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R \neq 0$ .

• Dérivation

$f$  est dérivable dans  $] -R, R[$  et l'on a :  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  (rayon  $R$ ).

• Intégration

Pour tout  $x \in ] -R, R[$  on a :  $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  (rayon  $R$ ).

**2 Développement d'une fonction en série entière**

$f$  est développable en série entière s'il existe une série entière de rayon de convergence  $R \neq 0$  telle que :

$$\forall x \in ] -R, R[ \cap U \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**2** Développements de base

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$

1.11 Calcul différentiel

**2** MP Dérivée suivant un vecteur

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} .$$

Avec les vecteurs d'une base fixée, on obtient ainsi les dérivées partielles.

**2** Différentielle

$f$  est différentiable au point  $a \in E$  s'il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$\forall h \in E \quad f(a + h) = f(a) + L(h) + o(h),$$

$L$  est la différentielle  $df(a)$  de  $f$  en  $a$ . Dans le cas d'une fonction numérique ( $F = \mathbb{R}$ ), avec les dérivées partielles, on a :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

**2 MP Matrice jacobienne**

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

**2 MP Opérations sur les différentielles**

$$\begin{aligned} d(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha df(a) + \beta dg(a) \\ dB(f, g)(a) &= B(df, g)(a) + B(f, dg)(a) \\ d(g \circ f)(a) &= dg(f(a)) \circ df(a) \end{aligned}$$

**2 PSI Dérivée de  $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$**

$$f'(t) = \sum_{k=1}^p x'_k(t) \times \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t), \dots, x_p(t)).$$

**2 PSI Dérivées de  $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v)) = g(u, v)$**

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} \quad \left| \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}$$

**2 Gradient**

C'est l'unique vecteur  $A$  tel que :

$$\forall h \in E \quad df(a) \cdot h = \langle A | h \rangle.$$

Il se calcule :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i \right].$$

Il est orthogonal à la ligne de niveau de  $f$  passant par  $a$ .

## ② Théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

vrai si les dérivées partielles sont continues en  $a$

## ② Extrémum local

- Condition nécessaire

Si  $f$  présente un extrémum local en  $a$ , et si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors :

$$\nabla f(a) = \vec{0}.$$

Un point vérifiant cette condition est appelé point critique, ou point stationnaire, de  $f$ .

- Étude d'un point critique  $a$

On étudie le signe de la différence :

$$\Delta(h_1, \dots, h_n) = f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

avec les  $h_i$  voisins de 0.

## ② Plan tangent à une surface

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \nabla f(A) = 0.$$

surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$   
A point régulier, soit  $\nabla f(A) \neq \vec{0}$ .

## 2. Algèbre générale

### 2.1 Ensembles et applications

#### ① Recouvrement, partition

- Un recouvrement d'une partie  $A$  de  $E$  est une famille de parties de  $E$  dont la réunion contient  $A$ .
- Une partition d'un ensemble  $E$  est une famille de parties non vides de  $E$ , deux à deux disjointes, et dont la réunion est  $E$ .

### 1 Fonction indicatrice d'une partie $A$

Elle est définie par :

$$\mathbb{1}_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in A$$

$$\mathbb{1}_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin A.$$

$$\mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$$

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

### 1 Image directe, image réciproque

Si  $A \subset E$ , l'image de  $A$  par  $f$  est :

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} \subset F.$$

Si  $B \subset F$ , l'image réciproque de  $B$  est la partie de  $E$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}.$$

### 1 Application injective

$f$  est injective si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

$$\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

### 1 Application surjective

$f$  est surjective si tout élément  $y$  de  $F$  est l'image d'au moins un élément  $x$  de  $E$ , soit :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x).$$

### 1 Composition des applications injectives, surjectives

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective.}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective.}$$

## 2.2 Relations

### 1 Propriétés d'une relation binaire

$$\mathcal{R} \text{ réflexive} \quad \forall x \in E \quad x \mathcal{R} x$$

$$\mathcal{R} \text{ symétrique} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$$

$$\mathcal{R} \text{ antisymétrique} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x \implies x = y$$

$$\mathcal{R} \text{ transitive} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \implies x \mathcal{R} z$$

## 1 Relation d'équivalence

Une relation binaire  $\mathcal{R}$ , définie sur un ensemble  $E$ , est une relation d'équivalence si elle est, à la fois, réflexive, symétrique et transitive.

## 1 Classes d'équivalence

La classe d'équivalence de  $x$ , modulo  $\mathcal{R}$ , est l'ensemble des  $y$  de  $E$  tels que  $x\mathcal{R}y$ .

L'ensemble des classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  constitue une partition de  $E$ .

## 2.3 Calculs algébriques

### 1 Sommes usuelles

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} ; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} .$$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{si } x \neq 1 \quad ; \quad \sum_{k=0}^n x^k = n+1 \quad \text{si } x = 1 .$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  
$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} .$$

### 1 Coefficients binomiaux

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} .$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n!$  (lire : factorielle  $n$ ) est le produit des  $n$  premiers nombres entiers. On pose  $0! = 1$ .

### 1 Formule du binôme

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

## 2.4 Nombres complexes

### ① Conjugué d'un nombre complexe

$$z = x + iy \quad ; \quad \bar{z} = x - iy$$

$x$  et  $y$  sont réels. Les images de  $z$  et de  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à  $Oy$ .

### ① Module d'un nombre complexe

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le module  $|z|$  représente la distance  $OM$ .

### ① Propriétés du module

Le module d'un nombre complexe a les mêmes propriétés que la valeur absolue d'un nombre réel.

### ① Forme trigonométrique d'un complexe non nul

$$z = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$\rho = |z|$  est le module de  $z$ .

$\theta$  est un argument de  $z$ .

### ① Propriétés d'un argument

Les égalités suivantes ont lieu à  $2k\pi$  près (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ) :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad ; \quad \arg(z^n) = n \arg z \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} ;$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad ; \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'.$$

### ① Formule de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

$$\text{Autre écriture : } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

$$\theta \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z}$$

### ① Formules d'Euler

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a : } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

### ① Transformation de $a \cos t + b \sin t$

$$a \cos t + b \sin t = A \cos(t - \varphi).$$

La somme des deux signaux a pour amplitude  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Son déphasage  $\varphi$  est défini par :

$$\cos \varphi = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{A}$$

### ① Racines n-ièmes de l'unité : liste

$$\mathbb{U}_n = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \quad \text{avec} \quad u_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = (u_1)^k.$$

### ① Racines n-ièmes de l'unité : propriété

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0.$$

## 2.5 Structures algébriques

### ① MP Loi de composition interne

• Une loi de composition interne  $*$  sur  $E$

est associative si :  $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x * y) * z = x * (y * z)$  ;

est commutative si :  $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x * y = y * x$ .

admet un élément neutre  $e$  si :  $\forall x \in E \quad x * e = e * x = x$ .

• Un élément  $x$  est inversible s'il existe  $x'$  tel que :  $x * x' = x' * x = e$ .

• Si  $*$  et  $\top$  sont deux lois de composition interne de  $E$ , on dit que  $*$  est distributive par rapport à  $\top$ , si l'on a toujours :

$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z) \quad \text{et} \quad (y \top z) * x = (y * x) \top (z * x).$$

### ① MP Groupe et sous-groupe

• Un ensemble non vide  $G$ , muni d'une loi de composition interne  $*$ , est un groupe si :

– la loi est associative ;

- il existe un élément neutre  $e$  ;
- tout élément de  $G$  possède un symétrique dans  $G$ .
- Une partie stable  $H$  d'un groupe  $G$  est un sous-groupe de  $G$  si la restriction à  $H$  de la loi de  $G$  y définit une structure de groupe.
- Pour qu'une partie non vide  $H$  d'un groupe  $G$  soit un sous-groupe de  $G$ , il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall x \in H & \forall y \in H & xy \in H ; \\ \forall x \in H & x^{-1} \in H . \end{cases}$$

ou encore :

$$\forall x \in H \quad \forall y \in H \quad xy^{-1} \in H .$$

- Les sous-groupes du groupe additif  $\mathbb{Z}$  sont les ensembles :

$$n\mathbb{Z} = \{nx ; x \in \mathbb{Z}\} \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N} .$$

- L'intersection d'une famille de sous-groupes est un sous-groupe de  $G$ .

## ② MP Morphisme de groupes

- Soit  $G$  et  $G'$  deux groupes notés multiplicativement. Une application  $f$ , de  $G$  dans  $G'$ , est un morphisme de groupes si, et seulement si,

$$\forall x \in G \quad \forall y \in G \quad f(xy) = f(x) f(y) .$$

- **Noyau et image**

$$\begin{array}{l|l} \text{Im } f = \{y \in G' ; \exists x \in G \ y = f(x)\} . & \text{Ker } f = \{x \in G ; f(x) = 0\} . \\ f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = G' . & f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0\} . \end{array}$$

## ② MP Sous-groupe engendré par une partie

- L'intersection de la famille des sous-groupes de  $G$  contenant une partie  $A$  donnée est un sous-groupe de  $G$  appelé sous-groupe engendré par  $A$ . C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe contenant  $A$ .
- Le sous-groupe engendré par  $A$  est l'ensemble des composés d'éléments de  $A$  et d'inverses d'éléments de  $A$ .
- Si un groupe  $G$  est engendré par un seul élément  $a$ , il est dit monogène. On dit que  $a$  est un générateur de  $G$ .

## ② MP Groupe cyclique

Tout groupe monogène est isomorphe :

- à  $(\mathbb{Z}, +)$  s'il est infini,
  - à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  s'il est d'ordre  $n$ , ou à  $(U_n, \times)$  (groupe des racines  $n^e$  de l'unité).
- Dans ce cas, on dit que  $G$  est un groupe cyclique d'ordre  $n$ .

Les générateurs de  $U_n$  sont les nombres complexes  $u_k = (u_1)^k$  tels que  $k$  soit premier avec  $n$ .

## ② MP Théorème de Lagrange

Dans un groupe fini, l'ordre de tout sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

## ① MP Groupe symétrique

Le groupe des permutations de l'intervalle  $[[1, n]]$  de  $\mathbb{N}$  est appelé groupe symétrique d'ordre  $n$  et noté  $S_n$ .

## ① MP Cycle

Un cycle d'ordre  $p$  est une permutation  $\sigma = (a_1, \dots, a_p)$  de  $E$  qui laisse invariants les autres éléments de  $E$ , et telle que :

$$\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{p-1}) = a_p, \sigma(a_p) = a_1.$$

Un cycle d'ordre 2 est une transposition.

## ① MP Signature d'une permutation

Toute permutation  $\sigma$  de  $E$  est décomposable en un produit de transpositions.

Si le nombre de transpositions est pair, on dit que  $\sigma$  est paire et sa signature est  $\varepsilon(\sigma) = 1$ .

Si le nombre de transpositions est impair, on dit que  $\sigma$  est impaire et sa signature est  $\varepsilon(\sigma) = -1$ .

## ① MP

## Anneau et sous-anneau

- $(A, +, \times)$  est un anneau si :
  - $(A, +)$  est un groupe commutatif ;
  - la multiplication est associative et possède un élément neutre ;
  - la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- Une partie  $B$  d'un anneau  $A$ , stable pour  $+$  et  $\times$ , est un sous-anneau de  $A$  si la restriction à  $B$  des deux lois de  $A$  y définit une structure d'anneau, avec le même élément neutre pour  $\times$  que dans  $A$ .
- Pour qu'une partie  $B$  d'un anneau  $A$  soit un sous-anneau de  $A$ , il faut et il suffit que  $1_A \in B$  et :

$$\forall x \in B \quad \forall y \in B \quad x - y \in B \quad \text{et} \quad xy \in B.$$

## ② MP

## Morphisme d'anneaux

- $A$  et  $B$  étant deux anneaux, une application  $f$ , de  $A$  dans  $B$ , est un morphisme d'anneaux si l'on a toujours :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) ; f(xy) = f(x) f(y) ; f(1_A) = 1_B.$$

- **Noyau et image**

$$\text{Im } f = \{y \in B ; \exists x \in A \ y = f(x)\}. \quad | \quad \text{Ker } f = \{x \in A ; f(x) = 0\}.$$

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = B. \quad | \quad f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0\}.$$

## ② MP

## Anneau intègre

Lorsqu'il existe, dans un anneau, des éléments  $a$  et  $b$  tels que :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0 \quad \text{et} \quad ab = 0,$$

on dit que  $a$  et  $b$  sont des diviseurs de zéro.

Un anneau intègre est un anneau commutatif, non réduit à  $\{0\}$ , et sans diviseur de zéro.

## ① MP

## Corps et sous-corps

- Un corps est un anneau non réduit à  $\{0\}$  dont tous les éléments, sauf 0, sont inversibles.

- Une partie  $L$  d'un corps  $K$ , stable pour  $+$  et  $\times$ , est un sous-corps de  $K$ , si la restriction à  $L$  des deux lois de  $K$  y définit une structure de corps, c'est-à-dire si c'est un sous-anneau, et si l'inverse d'un élément non nul de  $L$  reste dans  $L$ .

## ② MP Idéal d'un anneau commutatif

- Soit  $A$  un anneau commutatif. Une partie  $I$  de  $A$  est un idéal si  $I$  est un sous-groupe de  $(A, +)$  et si, pour tout  $x \in I$  et tout  $a \in A$ , on a  $xa \in I$ .
- L'intersection  $I \cap J$  et la somme  $I + J$  de deux idéaux sont des idéaux.
- Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.
- Les idéaux de  $\mathbb{Z}$  sont de la forme  $n\mathbb{Z}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.6 Arithmétique

### ① Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Si  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , on dit que  $b$  divise  $a$  si, et seulement si, il existe  $q \in \mathbb{Z}$  tel que  $a = bq$ .

### ① Nombres premiers

Un entier  $p$  est premier si  $p \leq 2$ , et si ses seuls diviseurs sont 1 et  $p$ .

### ① Division euclidienne

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , il existe un élément unique  $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b.$$

$q$  est le quotient et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

### ① - ② MP pgcd

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. Le plus grand élément  $d \in \mathbb{N}^*$ , diviseur de  $a$  et de  $b$ , est le PGCD  $(a, b)$ , noté aussi  $a \wedge b$ .

En termes d'idéaux :  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

**1 MP      Algorithme d'Euclide**

Si  $q_1$  et  $r_1$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , on a :

$$a \wedge b = b \wedge r_1.$$

On recommence avec  $b$  et  $r_1$ . Le dernier reste non nul de ce processus est le PGCD de  $a$  et de  $b$ .

**1 MP      Nombres premiers entre eux**

Si  $a \wedge b = 1$ , on dit que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

**1 MP      Relation de Bézout**

Pour que deux entiers relatifs non nuls  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux, il faut, et il suffit, qu'il existe  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{Z}$  tels que :

$$au + bv = 1.$$

**1 - 2 MP      PPCM**

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs non nuls. Le plus petit élément  $m \in \mathbb{N}^*$ , multiple à la fois de  $a$  et de  $b$ , est le PPCM  $(a, b)$ , noté aussi  $a \vee b$ .

En termes d'idéaux :  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ .

**1 MP      Relation entre pgcd et ppcm**

$$(a \vee b) \times (a \wedge b) = |ab|.$$

**1 MP      Lemme de Gauss**

Soit  $a, b, c$  trois entiers relatifs tels que  $a$  divise  $bc$ , et  $a$  premier avec  $b$ . Alors  $a$  divise  $c$ .

**1 - 2 MP      Anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La relation binaire dans  $\mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b &\iff a \text{ et } b \text{ ont le même reste dans la division par } n \\ &\iff n \mid (a - b) \end{aligned}$$

est une relation d'équivalence.

On la note  $a \equiv b \pmod{n}$ ; lire :  $a$  congrue à  $b$  modulo  $n$ .

On note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  l'ensemble des classes d'équivalence

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} ; a \equiv b \pmod{n}\}.$$

- Pour  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  muni des deux lois :

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad ; \quad \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$$

est un anneau commutatif.

- Un élément  $\bar{a}$  de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est inversible si, et seulement si,  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps si, et seulement si,  $n$  est premier.

## ① MP Valuation p-adique

Soit  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier non nul. La valuation p-adique de  $n$  est le plus grand entier  $k$  tel que  $p$  divise  $n$ . On la note  $v_p(n)$ .

## ② MP Indicatrice d'Euler

- C'est le nombre  $\varphi(n)$  des entiers compris entre 1 et  $n$  et premiers avec  $n$ .
- Si  $n$  est premier, alors  $\varphi(n) = n - 1$ .

- À partir de la décomposition en facteurs premiers de  $n$  :  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$ , on obtient :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1) p_i^{k_i - 1} = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

## ② MP Théorème d'Euler

Si  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux avec  $n \geq 2$ , on a :

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

## ② MP Théorème chinois

- Premier énoncé

Si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux,  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

- Application aux systèmes de congruences

Soit  $p$  et  $q$  des entiers premiers entre eux. Pour tous entiers  $a$  et  $b$ , le système d'inconnue  $x$  :

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$$

admet des solutions entières.

**1 - 2 MP**

### Petit théorème de Fermat

Soit  $p$  un nombre premier. Pour tout entier  $a$ , on a :

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

## 2.7 Polynômes

**1**

### Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Si  $A = BQ$  (avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$ ), on dit que  $A$  est un multiple de  $B$ , ou que  $B$  est un diviseur de  $A$ .

**1**

### Division euclidienne

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ , avec  $B \neq 0$ . Il existe des polynômes uniques  $Q$  et  $R$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad d^\circ R < d^\circ B.$$

$Q$  est le quotient, et  $R$  le reste, dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

**1**

### Racines d'un polynôme

- Un zéro  $\alpha$  de  $P$  est dit d'ordre  $k$ , ou de multiplicité  $k$  (avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ), s'il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X - \alpha)^k Q$  avec  $Q(\alpha) \neq 0$ .
- Un zéro  $\alpha$  de  $P$  est d'ordre au moins  $k$  si, et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0.$$

- L'ordre est égal à  $k$  si, en plus,  $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ .

**1**

### Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  a au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

On en déduit qu'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , de degré  $n$ , a exactement  $n$  racines dans  $\mathbb{C}$ , en comptant chaque racine autant de fois que son ordre de multiplicité.

**1 Polynômes irréductibles**

- Dans  $\mathbb{C}[X]$ , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.
- Dans  $\mathbb{R}[X]$ , les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, et les polynômes  $aX^2 + bX + c$  avec  $b^2 - 4ac < 0$ .

**1 Somme et produit des racines**

- Si  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  (avec  $a_n \neq 0$ ) est scindé, ses racines  $\alpha_i$  vérifient :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ; \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} .$$

- Dans le cas d'un polynôme de degré 2 ( $ax^2 + bx + c$ ), la somme  $S$  et le produit  $P$  des racines sont donnés par :  $S = -\frac{b}{a}$  et  $P = \frac{c}{a}$ .

**1 MP Relations entre les coefficients et les racines**

Si  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  est de la forme ci-dessus, désignons par  $\sigma_p$  la somme des produits  $p$  à  $p$  des racines. On a la relation :

$$\sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n} .$$

**1 MP Polynôme d'interpolation de Lagrange**

Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  des éléments de  $\mathbb{K}$ , distincts deux à deux et des éléments  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{K}$ .

Il existe un unique polynôme  $P$  de degré  $\leq n$  tel que :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad P(a_i) = b_i.$$

Ce polynôme est :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)} b_i.$$

**2** MP

### Idéal de $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}[X]$  est un anneau principal, c'est-à-dire que si  $I$  est un idéal non réduit à  $\{0\}$ , il existe un polynôme unitaire unique  $P$  tel que  $I = P \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  engendre  $I$ .

**1** - **2** MP

### pgcd

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls de  $K[X]$ . Le pgcd de  $A$  et de  $B$  est le diviseur commun à  $A$  et  $B$  de degré maximal et unitaire. On le note  $A \vee B$ .

Il s'agit du générateur unitaire de l'idéal  $A \mathbb{K}[X] + B \mathbb{K}[X]$ .

**1** MP

### Algorithme d'Euclide

Si  $Q_1$  et  $R_1$  sont le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , on a :

$$A \vee B = B \vee R_1.$$

On recommence avec  $B$  et  $R_1$ . Le dernier reste non nul (normalisé) de ce processus est le pgcd de  $A$  et de  $B$ .

**1** MP

### Polynômes premiers entre eux

Si  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

**1** - **2** MP

### ppcm

Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls de  $K[X]$ . Le ppcm de  $A$  et de  $B$  est le multiple commun à  $A$  et  $B$  de degré minimal et unitaire. On le note  $A \wedge B$ .

Il s'agit du générateur unitaire de l'idéal  $A \mathbb{K}[X] \cap B \mathbb{K}[X]$ .

**① MP Théorème de Bézout**

Pour que deux polynômes  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{K}[X]$  soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{K}[X]$  tels que :

$$AU + BV = 1.$$

Si  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux et non tous deux constants, il existe des polynômes  $U_0$  et  $V_0$  de  $\mathbb{K}[X]$  uniques tels que :

$$AU_0 + BV_0 = 1 \quad \text{avec} \quad d^\circ U_0 < d^\circ B \quad \text{et} \quad d^\circ V_0 < d^\circ A.$$

**① MP Théorème de Gauss**

Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $A$  divise  $BC$ , et  $A$  premier avec  $B$ , alors  $A$  divise  $C$ .

### 3. Algèbre linéaire et multilinéaire

#### 3.1 Espaces vectoriels

**① Espace vectoriel : définition**

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, s'il est muni d'une loi de composition interne notée  $+$ , et d'une loi de composition externe sur  $\mathbb{K}$  telles que :

$(E, +)$  est un groupe commutatif,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad \forall y \in E \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) ;$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) ; (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x ; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ; 1x = x.$$

**① Combinaison linéaire**

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille finie de vecteurs. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur du type :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \quad \text{pour tout } i.$$

### ① Sous-espace vectoriel

Une partie non vide  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in F \quad x + \lambda y \in F.$$

### ① Sous-espace engendré par une partie

• L'intersection  $F$  de tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  contenant une partie  $A$  donnée est le sous-espace vectoriel engendré par  $A$ .

On note  $F = \text{Vect}(A)$ .

• Le sous-espace vectoriel engendré par  $A$  est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de  $A$ .

### ① Famille génératrice

• Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est génératrice de  $E$  si  $F = \text{Vect}[(x_i)_{i \in I}]$ .

• Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

### ① Famille libre

• On dit qu'une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est une famille libre, ou que les vecteurs sont linéairement indépendants, si, pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , on a :

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in J \quad \lambda_i = 0.$$

• Toute sous-famille non vide d'une famille libre est libre.

### ① Base

• Une base de  $E$  est une famille libre de  $E$  qui engendre  $E$ .

•  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  si, et seulement si, tout vecteur  $x$  de  $E$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Les scalaires  $x_i$  sont les composantes, ou coordonnées, du vecteur  $x$ .

## ① Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 ; x_1 \in E_1 \quad x_2 \in E_2\}$
- Quand la décomposition est toujours unique, la somme est directe et se note  $F = E_1 \oplus E_2$ .

- $E_1$  et  $E_2$  supplémentaires :

$$E = E_1 \oplus E_2 \iff E = E_1 + E_2 \text{ et } E_1 \cap E_2 = \{0\}.$$

- $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires si, et seulement si, en juxtaposant une base de  $E_1$  et une base de  $E_2$ , on obtient une base de  $E$ .

## ① Existence de bases

- Théorème de la base extraite

De toute famille génératrice de  $E$  on peut extraire une base.

- Théorème de la base incomplète

Toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base de  $E$ .

## ① Dimension d'un espace vectoriel

- Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

- Si  $E$  a une base comportant  $n$  vecteurs, alors toute base de  $E$  comporte aussi  $n$  vecteurs. On dit que  $n$  est la dimension de  $E$  ; on la note  $\dim E$ .

## ① Recherche de bases

- Toute famille libre de  $E$  a au plus  $n$  vecteurs. Si elle comporte  $n$  vecteurs, c'est une base.

- Toute famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  vecteurs. Si elle comporte  $n$  vecteurs, c'est une base.

## ① Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est de dimension finie, et  $\dim F \leq \dim E$ .

Si  $\dim F = \dim E$  (avec  $F \subset E$ ), alors  $F = E$ .

**1 Relation de Grassmann**

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

**1 Rang d'une famille de vecteurs**

- Le rang d'une famille finie de vecteurs est la dimension du sous-espace vectoriel qu'ils engendrent.
- C'est aussi le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille.

**1 Produit de  $p$  sous-espaces vectoriels**

$$\dim(F_1 \times \cdots \times F_p) = \dim F_1 + \cdots + \leq \dim F_p.$$

**1 Somme de  $p$  sous-espaces vectoriels**

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_i^p F_i = \{x_1 + \cdots + x_p ; x_i \in F_i\}.$$

C'est le sous-espace de  $E$  engendré par  $F_1 \cup \cdots \cup F_p$ .

En dimension finie, on a :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i.$$

**1 Somme directe de  $p$  sous-espaces vectoriels**

Quand tout vecteur  $x$  de  $\sum_i^p F_i$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\sum_i^p x_i$ ,

la somme des  $F_i$  est dite directe et on la note  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ . En dimension finie :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i \iff \text{la somme est directe.}$$

**1 Base adaptée à une somme directe**

La réunion d'une base de chaque  $F_i$  constitue une base de  $E \iff E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

**3.2 Applications linéaires**

**1 Applications linéaires : définitions**

Une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est dite linéaire si elle transporte les opérations des espaces vectoriels, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad ; \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

ou encore :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

**1 Vocabulaire**

- Si  $f$  est bijective, c'est un isomorphisme ;  
si  $E = F$ ,  $f$  est un endomorphisme ;  
si  $f$  est bijective avec  $E = F$ ,  $f$  est un automorphisme.

- On note :

$\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ ,

$\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E$ ,

$GL(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

**1 Noyau et image**

- Définitions

$$\text{Im } f = \{y \in F \ ; \ \exists x \in E \ y = f(x)\} \quad | \quad \text{Ker } f = \{x \in E \ ; \ f(x) = 0\}.$$

- Propriétés

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = F. \quad | \quad f \text{ injective} \iff \text{Ker } f = \{0\}.$$

**1 Équation linéaire**

Si  $f \in \mathcal{F}(E, F)$ , l'équation linéaire  $f(x) = b$  d'inconnue  $x$  a pour ensemble de solutions soit l'ensemble vide, soit :

$$x_0 + \text{Ker } f$$

où  $x_0$  est une solution particulière de l'équation, c'est-à-dire  $f(x_0) = b$ .

### 1 Image d'une famille de vecteurs

- Si  $G$  engendre  $E$ , alors  $f(G)$  engendre  $f(E)$ .

L'image de toute famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$  si, et seulement si,  $f$  est surjective.

- Si  $f(A)$  est libre dans  $F$ , alors  $A$  est libre dans  $E$ .

$f$  est injective si, et seulement si, pour toute partie libre  $L$  de  $E$ ,  $f(L)$  est une partie libre de  $F$ .

- L'image d'une base de  $E$  est une base de  $F$  si, et seulement si,  $f$  est bijective.

### 1 Théorème du rang

- Si  $E$  est de dimension finie, on a :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

$\dim \text{Im } f$  est appelé rang de  $f$  et noté  $\text{rg } f$ .

### 1 Cas où $E$ et $F$ ont même dimension finie

Si  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie, on a :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

### 1 Projecteur

$$p \in \mathcal{L}(E)$$

$$p^2 = p$$

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$

$p$  est la projection sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$

### 1 Symétrie

$$s \in \mathcal{L}(E)$$

$$s^2 = \text{Id}_E$$

$p$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

### 3.3 Matrices, déterminants

#### 1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

• L'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

• C'est un espace vectoriel pour les opérations définies par :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \text{et} \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

• Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  fixés, on note  $E_{ij}$  la matrice dont le coefficient situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  est égal à 1, et dont les autres coefficients sont égaux à 0.

$(E_{ij})_{i,j}$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , qui est donc de dimension  $np$ .

#### 1 Matrice d'une application linéaire

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels de dimensions  $p$  et  $n$ , munis de bases respectives  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ .

$f \in \mathcal{L}(E, F)$  est déterminée par la donnée des vecteurs :

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq j \leq p,$$

c'est-à-dire par la matrice  $A = (a_{ij})$  dont les vecteurs colonnes sont les composantes de  $f(e_j)$  dans la base de  $F$  qui a été choisie.

On dit que  $A$  est la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ .

#### 1 Produit de matrices

$A$  de format  $(n, p)$   $B$  de format  $(p, q)$ ,  
 $C = AB$ , de format  $(n, q)$ ,

$$\forall i \quad \forall j \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Pour calculer  $c_{ij}$ , on multiplie la ligne  $i$  de  $A$  par la colonne  $j$  de  $B$ .

Il faut donc :

nombre de colonnes de  $A$

= nombre de lignes de  $B$ .

#### 1 Produits de matrices particulières

• Base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}.$$

Le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$  vaut 1 si  $i = j$ , et 0 si  $i \neq j$ .

- Matrices triangulaires

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

- Matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}$$

### 1 Formule du binôme de Newton

Si  $A$  et  $B$  commutent, alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

### 1 Matrices inversibles

- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible s'il existe  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

- Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , pour que  $A$  soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à droite, ou inversible à gauche.

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

### 1 Transposée d'une matrice

- La transposée d'une matrice  $A$  de format  $(n, p)$  est la matrice de format  $(p, n)$ , notée  ${}^tA$  (ou  $A^T$ ), de terme général  $b_{ij} = a_{ji}$ .

Elle est obtenue à partir de  $A$  en échangeant les lignes et les colonnes.

- ${}^t({}^tA) = A$  ;  ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$  ;  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$  ;  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ .

- Si  $A$  est inversible,  ${}^tA$  l'est aussi et on a :  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

### 1 Matrice de passage

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est la matrice  $P$  dont les colonnes sont les composantes des vecteurs  $e'_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**1****Changement de bases**

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $C$  et  $C'$  deux bases de  $F$ .

Notons  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ ,

$Q$  la matrice de passage de  $C$  à  $C'$ ,

$A$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $C$ ,

$A'$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $C'$ .

On a alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Les matrices  $A$  et  $A'$  sont dites équivalentes. Elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Si  $E = F$  avec  $\mathcal{B} = C$  et  $\mathcal{B}' = C'$ , alors  $P = Q$ , soit  $A' = P^{-1}AP$ .

Les matrices  $A$  et  $A'$  sont dites semblables.

**1****Trace d'une matrice, d'un endomorphisme**

• La trace d'une matrice  $A = (a_{ij})$ , carrée d'ordre  $n$ , est la somme de ses éléments diagonaux, soit :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{K}.$$

• Propriétés

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B \quad ; \quad \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad ; \quad \text{tr}(PMP^{-1}) = \text{tr } M.$$

• Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , toutes les matrices qui le représentent ont la même trace. Cette trace commune est la trace de l'endomorphisme  $f$ .

**1****Propriétés des déterminants**

•  $\det(A) = \det({}^tA)$ .

• Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes (ou lignes) proportionnelles est nul.

• On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une de ses lignes (resp. colonnes) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes).

- Multiplier une ligne (ou une colonne) d'un déterminant par un scalaire, c'est multiplier le déterminant par ce scalaire.
- Un déterminant est égal à la somme des produits deux à deux des éléments d'une rangée (ligne ou colonne) par leurs cofacteurs.
- $\det(A B) = \det A \times \det B$ .
- $A$  inversible  $\iff \det A \neq 0$ . On a alors :  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .

#### ① Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A \times \det D. \quad \left| \begin{array}{l} A \text{ et } D \text{ matrices carrées} \end{array} \right.$$

#### ① Déterminant de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

### 3.4 Réduction des endomorphismes

#### ② Éléments propres

$$\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}(E) \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad x \in E \quad \text{avec } x \neq 0 \\ f(x) = \lambda x \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda \text{ valeur propre de } f \text{ associée à } x \\ x \text{ vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda \end{array} \right.$$

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , le sous-espace propre

$$E_\lambda(f) = \{x \in E ; f(x) = \lambda x\}$$

comporte les vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda$  et le vecteur  $\vec{0}$ .

Le spectre de  $f$  est l'ensemble de ses valeurs propres.

Définitions analogues pour  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ .

**2 Polynôme caractéristique**

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

Les zéros de  $\chi_A$  sont les valeurs propres  $\lambda_k$  de  $A$ .  
 $\lambda$  est valeur propre d'ordre  $m_\lambda$  si  $\lambda$  est un zéro d'ordre  $m_\lambda$  de  $\chi_A$ .

On a toujours  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$ .

Si  $\chi_A$  est scindé :  $\text{tr } A = - \sum_{k=1}^n \lambda_k$  et  $\det A = (-1)^n \prod_{k=1}^n \lambda_k$ .

**2 Endomorphisme diagonalisable**

$f$  diagonalisable : il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale, ou encore : il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

**2 Condition suffisante**

Si  $\dim E = n$  et si  $f$  a  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable.

**2 Condition nécessaire et suffisante**

$f$  diagonalisable

$\iff E$  est somme directe des sous-espaces propres ;

$\iff E$  admet une base de vecteurs propres ;

$\iff$  le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé et, pour toute valeur propre  $\lambda_k$  d'ordre  $m_k$ , on a :

$$\dim(E_{\lambda_k}) = m_k .$$

**2 MP Endomorphisme nilpotent**

$f$  nilpotent :  $\exists k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^k = 0$  | le plus petit  $k$  est l'indice de nilpotence de  $f$ .

## ② Polynôme d'un endomorphisme

À  $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$ , on associe  $P(f) = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + \dots + a_p u^p$ .  
 $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  si  $P(f) = 0$ .

## ② MP Théorème de décomposition des noyaux

Soit  $P_1, \dots, P_r$  des éléments de  $\mathbb{K}[X]$ , deux à deux premiers entre eux, de produit égal à  $P$ , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

## ② MP Polynôme minimal

L'ensemble des polynômes annulateurs de  $f$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . L'unique polynôme normalisé qui engendre cet idéal est le polynôme minimal de  $u$ .

## ② Polynôme annulateur et diagonalisabilité

$f$  est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé, annulateur de  $f$ , dont toutes les racines sont simples.

## ② Théorème de Cayley-Hamilton

Si  $E$  est de dimension finie, le polynôme caractéristique de  $f$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

Le polynôme minimal de  $f$  divise donc le polynôme caractéristique de  $f$ .

### 3.5 Espaces vectoriels euclidiens

#### ① Produit scalaire

Un produit scalaire  $\varphi$  sur  $E$  est

une forme

(application de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$ )

bilinéaire

(linéaire par rapport à chaque variable)

symétrique  $(\forall (x, y) \in E \times E \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x))$

définie, positive  $(\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \varphi(x, x) > 0)$

On dit que  $(E, \varphi)$  est un espace préhilbertien réel. Si, en plus, il est de dimension finie, c'est un espace euclidien.

$\varphi(x, y)$  se note  $\langle x | y \rangle$  ou  $(x | y)$  ou  $x \cdot y$ .

### 1 Norme euclidienne

$E$  étant un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire, en posant

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle},$$

on définit une norme sur  $E$ , c'est-à-dire qu'on a les propriétés :

$\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \implies x = 0$  (séparation)

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité)

$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire)

### 1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad | \langle x | y \rangle | \leq \|x\| \|y\|$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont liés.

### 1 Vecteurs orthogonaux

- Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $\langle x | y \rangle = 0$  ; on note  $x \perp y$ .
- Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
- Une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in I}$  est orthonormale si elle est orthogonale et si les vecteurs sont tous unitaires.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

### ① Méthode d'orthogonalisation de Schmidt

• Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $E$ . On construit par récurrence une base orthogonale  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $E$  en posant :

$$y_1 = x_1 \quad \text{puis} \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i y_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = \frac{\langle y_i | x_k \rangle}{\langle y_i | y_i \rangle}.$$

• Il reste à diviser chaque vecteur obtenu par sa norme pour obtenir une base orthonormale.

### ① Supplémentaire orthogonal

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont supplémentaires et si tout vecteur de  $F$  est orthogonal à tout vecteur de  $G$ . On note :

$$E = F \oplus^\perp G.$$

### ① Projection orthogonale

$p_F$  projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i | x \rangle e_i.$$

si  $E = F \oplus^\perp G$

si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$ .

### ① Distance d'un vecteur à un sous-espace

$d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|$  est un minimum atteint en un point, et un seul,  $z = p_F(x)$ , et l'on a :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

### ① Inégalité de Bessel

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormale de  $F$ , on a :

$$\forall x \in E \quad \sum_{j=1}^p |\langle e_j | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

## ① MP Hyperplan affine

Dans un repère orthonormal, un hyperplan affine  $\mathcal{H}$  défini par un point  $A$  et un vecteur normal  $\vec{n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  admet pour équation :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + h = 0.$$

La distance d'un point  $M$  de  $E$  à  $\mathcal{H}$  est :  $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}$ .

## ② MP Suite totale

Une partie  $F$  d'un espace préhilbertien réel  $E$  est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de  $F$  est dense dans  $E$ .

Si  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite totale d'éléments de  $E$ , tout vecteur de  $E$  est limite d'une combinaison linéaire (finie) de vecteurs de cette suite.

## ① - ② Isométrie vectorielle

Dans  $E$  euclidien, un endomorphisme  $f$  est une isométrie vectorielle (ou endomorphisme orthogonal) s'il vérifie les propriétés équivalentes :

- $f$  conserve la norme :  $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|.$
- $f$  conserve le produit scalaire :  $\forall x, y \in E \quad \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$
- Il existe une base orthonormale  $\mathcal{B}$  telle que  $f(\mathcal{B})$  soit une base orthonormale.
- Pour toute base orthonormale  $\mathcal{B}$ ,  $f(\mathcal{B})$  est une base orthonormale.

## ① - ② Matrice orthogonale

Une matrice carrée  $A$  est dite orthogonale si elle vérifie les propriétés équivalentes :

- C'est la matrice de passage d'une base orthonormale  $\mathcal{B}$  à une base orthonormale  $\mathcal{B}'$ .
- Les vecteurs colonnes vérifient :  $\forall i \quad \forall j \quad \langle C_i | C_j \rangle = \delta_{ij}.$
- ${}^t A A = I_n \iff {}^t A = A^{-1}.$

**① - ② Déterminant d'une matrice orthogonale**

Si  $A$  est une matrice orthogonale, on a  $\det A = \pm 1$ .

**① - ② Isométries vectorielles en dimension 2**

Soit  $A$  une matrice orthogonale d'ordre 2.

- Si  $\det A = 1$ ,  $c$ 'est la matrice de la rotation d'angle  $\theta$  tel que  $\operatorname{tr} A = 2 \cos \theta$ .
- Si  $\det A = -1$ ,  $c$ 'est la matrice de la réflexion dont l'axe est constitué par les vecteurs invariants.

**② MP Rotations en dimension 3**

Soit  $A \neq I_3$  une matrice orthogonale d'ordre 3 telle que  $\det A = 1$ .

Il s'agit de la rotation

dont l'axe est constitué par les vecteurs invariants

dont l'angle  $\theta$  vérifie :  $\operatorname{tr} A = 1 + 2 \cos \theta$ .

**② Endomorphisme symétrique**

- $f \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique si :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$$

- Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$ , on a

$$f \text{ symétrique} \iff {}^t A = A.$$

**② Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique**

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $E$ .

- Le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .
- $u$  est diagonalisable dans une base orthonormale.
- $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $u$ .
- Si  $A$  est une matrice carrée symétrique, il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $P$  telles que :

$$A = PDP^{-1} = PD{}^t P;$$

## 4. Calcul des probabilités

### 4.1 Événements et probabilités

#### 1 Dénombrer

- Pour dénombrer des situations, on se pose les questions :
  - quel est le nombre  $n$  d’objets de référence ?
  - quel est le nombre  $p$  d’objets concernés par une situation ?
  - les  $p$  objets sont-ils considérés sans ordre (en vrac ; tirage simultané) ou avec ordre ?
  - les répétitions sont-elles impossibles (les  $p$  objets sont tous distincts ; tirage sans remise) ou possibles (tirage avec remise) ?
- Quand une situation comporte plusieurs choix :
  - on effectue un produit quand on doit faire un choix, puis un autre . . .
  - on effectue une somme quand on considère un cas *ou bien* un autre
- Bilan

	sans répétition	avec répétition
avec ordre	$A_n^p$	$n^p$
sans ordre	$\binom{n}{p}$	–

#### 1 Nombre d’applications

- $n^p$  est le nombre d’applications d’un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.
- $C$  est le nombre de façons d’extraire  $p$  boules parmi  $n$  boules, avec remise et en tenant compte de l’ordre.

#### 1 Arrangements

- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$  est le nombre d’applications injectives.

- C'est le nombre de façons d'extraire  $p$  boules parmi  $n$  boules, sans remise et en tenant compte de l'ordre.

**1** **Combinaisons**

- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  est le nombre de combinaisons de  $n$  éléments pris  $p$  à  $p$ .

C'est le nombre de parties à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

- C'est le nombre de façons d'extraire  $p$  boules parmi  $n$  boules, sans remise et en vrac.

**1** **Événements**

- $\bar{A}$  est réalisé si, et seulement si,  $A$  n'est pas réalisé.
  - $A \cap B$  est réalisé si, et seulement si, tous les événements sont réalisés.
- Si  $A \cap B = \emptyset$ , les événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles.
- $A \cup B$  est réalisé si, et seulement si, l'un au moins des événements est réalisé.

**1** **Probabilité**

Application  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}_+$  qui vérifie :

$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$	$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$	$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
Si $A$ et $B$ incompatibles :	Dans le cas général :
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Dans le cas particulier d'une probabilité uniforme sur  $\Omega$  fini :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} .$$

**1** **Probabilités conditionnelles**

Soit  $A$  un événement tel que  $P(A) > 0$ . En posant, pour tout  $B$  :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

on définit une probabilité dite probabilité conditionnelle relative à  $A$ .

$\mathbb{P}_A(B)$  se note aussi  $\mathbb{P}(B|A)$  et se lit probabilité de  $B$  sachant  $A$ .

## 1 Probabilités composées

C'est l'égalité précédente écrite en ligne :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A)$$

et sa généralisation, qui commence par :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(C|A \cap B).$$

## 1 Probabilités totales

Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles. Pour tout événement  $B$ , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k).$$

## 1 Formule de Bayes

Soit  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  un système complet d'événements de probabilités toutes non nulles et  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B|A_k)} .$$

## 1 Indépendance de deux événements

On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

## 1 Indépendance mutuelle de $n$ événements

Des événements  $A_1, \dots, A_n$  sont mutuellement indépendants, ou indépendants dans leur ensemble, si, pour toute partie  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

## 4.2 Variables aléatoires

① - ②

### Loi de probabilité

Dans le cas où les valeurs possibles pour  $X$  constituent un ensemble fini, ou infini dénombrable,  $\Omega_1$ , connaître la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de  $X$ , c'est connaître les valeurs  $x_i$  et les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \in \Omega_1 \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

① - ②

### Espérance

• Définition

$$E(X) = \sum_i x_i p_i.$$

somme dans le cas fini,  
série dans le cas infini dénombrable

• Théorème du transfert

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

somme dans le cas fini,  
série dans le cas infini dénombrable

①

### Variance

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart type est défini par  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

①

### Variable centrée réduite

Pour  $a$  et  $b$  réels, on a toujours :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad ; \quad V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Si  $V(X) \neq 0$ , en posant  $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  on obtient  $E(Y) = 0$  et  $V(Y) = 1$ .

$Y$  est la variable centrée réduite associée à  $X$ .

①

### Inégalité de Markov

Si  $X$  ne prend que des valeurs positives :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon} .$$

### ① Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} .$$

### ① Couple de variables discrètes

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables discrètes définies sur le même espace probabilisé. Connaître la loi du couple, c'est connaître les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \quad \forall y_j \quad \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_{ij} .$$

On peut en déduire les lois marginales

$$\text{de } X : \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i.} \quad \left| \quad \text{de } Y : \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{.j}$$

### ① Lois conditionnelles

- Loi de  $X$  pour  $Y = y_j$  fixé :

$$\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} .$$

- Loi de  $Y$  pour  $X = x_i$  fixé :

$$\mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} .$$

### ① Indépendance de variables discrètes

- $X$  et  $Y$  indépendantes :

$$\forall (i, j) \quad p_{ij} = p_{i.} p_{.j} .$$

- $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \quad \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

## ① Somme et produit de variables aléatoires

- $X$  et  $Y$  quelconques

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$$

- $X$  et  $Y$  indépendantes

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

- $X_1, \dots, X_n$  quelconques

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n).$$

$$V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \operatorname{Cov}(X_i, X_j).$$

- $X_1, \dots, X_n$  deux à deux indépendantes

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

## ① MP Moments d'ordre $k$

Moment d'ordre  $k$

$$m_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k p_i$$

Moment centré d'ordre  $k$

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k]$$

## ② Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

## ① Covariance

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X) E(Y).$$

**② PSI****Coefficient de corrélation**

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} .$$

On a toujours :  $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ .

**①****Loi uniforme discrète**

- Loi de probabilité

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme discrète si  $X$  prend  $n$  valeurs possibles avec la probabilité  $\frac{1}{n}$  pour chaque valeur.

- Espérance et variance

Si  $X$  suit la loi uniforme discrète sur  $[[1, n]]$ , on a :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad ; \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12} .$$

**①****Loi de Bernoulli**

- Loi de probabilité

$X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0; 1[$ , notée  $\mathcal{B}(p)$  ou  $\mathcal{B}(1, p)$  si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et si :

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = q.$$

- Espérance et variance

$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = pq.$$

- Somme

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes et suivent la loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

**①****Loi binomiale**

- Loi de probabilité

$X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ , si l'univers-image est  $[[0, n]]$  et si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

- Espérance et variance

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq.$$

- Somme

Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_1, p)$  et  $Y$  la loi  $\mathcal{B}(n_2, p)$  et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ .

②

## Loi géométrique

- Loi de probabilité

$X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , notée  $\mathcal{G}(p)$ , si l'univers-image est  $\mathbb{N}^*$  et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = p q^{k-1}.$$

- Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

②

## Loi de Poisson

- Loi de probabilité

$X$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , si l'univers-image est  $\mathbb{N}$  et si :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Espérance et variance

$$E(X) = \lambda \quad ; \quad V(X) = \lambda.$$

②

## Fonction génératrice

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) t^k.$$

$$E(X) = G'_X(1) \quad ; \quad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$$

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

## ② Fonctions génératrices des lois usuelles

- Loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$

$$G_X(t) = 1 - p + pt \quad R = +\infty$$

- Loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$

$$G_X(t) = (1 - p + pt)^n \quad R = +\infty$$

- Loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1 - p)t} \quad R = \frac{1}{1 - p} > 1$$

- Loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad R = +\infty$$

## ② Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \left| \quad X_n \text{ suit } \mathcal{B}(n, p_n) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda \right.$$

## ② Loi faible des grands nombres

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes admettant la même espérance  $\mu$  et la même variance  $\sigma^2$ . En notant  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  leur moyenne :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

# Informatique

## 1. Environnement informatique

①

### Ordinateur

Les machines (*ordinateurs*) telles qu'elles ont été conçues à l'origine par von Neumann (1945) s'appuient sur l'*architecture* suivante :

- des blocs de *mémoire* pour le stockage de l'information ;
- un *processeur* pour le contrôle et les calculs ;
- des *périphériques* ;
- un canal de communication entre les entités précédentes (le *bus*).

Physiquement, en dehors des périphériques (*clavier, écran, etc.*) qui servent les interactions avec la machine, ces éléments constituent l'*unité centrale*. Le fonctionnement d'un ordinateur repose sur le modèle *théorique* de la *machine de Turing* : recevoir (lire) une information (codée), l'interpréter et en produire une nouvelle.

C'est l'exécution d'un très grand nombre de ces cycles pendant un temps extrêmement court qui rend les processus informatiques extraordinairement efficaces.

①

### Codage

L'*information* échangée entre les différents éléments d'un ordinateur est écrite avec les deux chiffres 0 et 1 (un bit), elle est codée en *binaire*. Chaque opération complexe se traduit en des mots assez longs, dont la taille est généralement évaluée en multiples d'octets (8 bits) : 1 ko (kilo-octets) =  $2^{10} = 1024$  octets, 1 Mo (méga-octets) =  $2^{10}$  ko, etc. Pour permettre la correction des erreurs en cours d'acheminement, l'information est accompagnée d'un code qui permet d'en contrôler l'intégrité. Par exemple, l'information peut être codée à l'aide de mots de 7 bits accompagnés d'un huitième bit déterminé de façon à ce que le nombre de 1 dans l'octet soit pair (*bit de parité*).

①

### Systemes d'exploitation

On le comprend, penser et organiser les processus au cœur de l'ordinateur n'est pas chose aisée ! On dispose alors d'un *système d'exploitation*, autrement dit une *couche logicielle* à l'interface entre la machine et l'utilisateur. Ces programmes sont le résultat de développements longs dans la durée et complexes dans la mise en œuvre, il en existe très peu.

**1****Langages de programmation**

Pour faire réaliser des tâches précises (*algorithmes*) à l'ordinateur, il faut les écrire dans un *langage* qu'un programme pourra traduire de façon à ce que le système d'exploitation puisse en commander l'exécution.

Il existe des *langages de bas niveau* qui demandent peu de traduction, dont les instructions qu'ils utilisent sont proches de celles des processeurs, et des *langages de haut niveau*, plus proches de l'utilisateur pour la syntaxe et donc plus éloignés de la machine.

On fera aussi la distinction entre les langages *compilés* (les programmes sont traduits en code exécutable directement par la machine – compilation – et exécutés ensuite), et les langages *interprétés* (les programmes sont traduits et exécutés simultanément). Avec les premiers une compilation suffit pour exécuter ensuite autant de fois que l'on veut le programme alors que pour les seconds toute l'interprétation est reprise à chaque fois !

**1****Logiciels**

Les *logiciels* sont des programmes qui ont été écrits dans un langage et compilés. Le terme de logiciel pourrait aussi s'appliquer à des programmes écrits avec un langage interprété mais on lui préférera celui de script.

Généralement, les logiciels sont écrits pour proposer à l'utilisateur une interface encore plus adaptée à des tâches données. Le plus souvent, l'utilisateur interagit avec le logiciel à l'aide de la souris (clic sur des icônes, sélection de texte, déplacement d'objets figurés, etc.) et du clavier (entrée de chaînes de caractères, etc.). Le système d'exploitation est un logiciel.

Quand ils ne présentent pas d'interfaces graphiques, des logiciels peuvent être utilisés en ligne de commande. L'utilisation se fait à travers un terminal, on entre une commande suivie d'éventuelles options pour lancer l'exécution. Bon nombre d'outils accompagnant le système d'exploitation s'utilisent comme cela.

## 2. Algorithmique

**1****Algorithmes**

Pour écrire un programme, il faut l'envisager comme une succession d'instructions précises et non ambiguës destinées à obtenir et garantir les résultats attendus. Des parties de ces séquences correspondent à l'exécution de tâches bien identifiées, elles constituent des algorithmes.

Les algorithmes sont *réutilisables*, une manière de bien les préciser est de les

écrire dans un langage simple (on dit aussi pseudo-code), ils sont alors facilement transposables dans un langage de programmation donné. Voici un exemple :

1. tant que  $(b - a) > \varepsilon$  faire
  2.  $m \leftarrow (b - a)/2$
  3. si  $f(a) \times f(m) > 0$  alors
    4.  $a \leftarrow m$
  5. sinon
    6.  $b \leftarrow m$
  7. fin si
8. fin tant que

### Algorithme de la dichotomie

Étant donnée une fonction  $f$ , continue sur un segment  $[a, b]$ , qui s'annule sur  $[a, b]$ , l'algorithme présenté ici décrit les opérations à effectuer pour obtenir une racine de l'équation  $f(x) = 0$  à une précision donnée  $\varepsilon$ .

## 1

## Complexité des algorithmes

Il existe des algorithmes naïfs et des algorithmes plus sophistiqués pour une même tâche. Ils se distinguent par le nombre d'opérations élémentaires à effectuer (*complexité temporelle*) et la quantité de mémoire utilisée (*complexité spatiale*). Il est donc souhaitable d'évaluer la complexité d'un algorithme pour en estimer la pertinence.

## 3. Programmation en Python

### 3.1 Généralités

Python est un langage de programmation interprété très facile à utiliser et disposant d'un grand nombre d'extensions utiles dans le domaine du calcul numérique. C'est la version 3 de Python qui est utilisée ici.

La grande particularité de Python est qu'il demande une *indentation* (décalage des lignes vers la droite) stricte des blocs d'instructions. Ainsi les programmes auront un maximum de lisibilité, lisibilité accrue par l'ajout de commentaires toujours bienvenus !

## 1

## Variables

Les variables sont les espaces mémoires que l'on utilise dans un programme pour stocker temporairement des valeurs. On leur donne un *nom* et elles ont un *type* implicite : entier, flottant, booléen, chaîne de caractères, etc.

```

a = 3                # Le contenu de a vaut 3, c'est un entier
b = 1.789           # b vaut 1.789, c'est un flottant
c = "Bonjour"       # c est une chaîne de caractères
d = False           # d est un booléen, il est positionné à faux
e = f = 1, "Hop!"   # e et f sont affectées respectivement...

```

## 1 Expressions et instructions

Les variables déclarées sont utilisées dans des *expressions* permettant de définir de nouvelles variables ou qui sont soumises à des *instructions*.

```

u = a * b + 2       # a * b + 2 est une expression
print(c+ "tout le monde !") # print est une instruction
v = a == b          # a == b est une expression (vrai si a = b, faux sinon)

```

## 1 Instructions conditionnelles

Nous avons souvent à orienter la suite des opérations d'un algorithme selon la valeur d'une variable ou d'une expression ; nous utilisons alors un *bloc conditionnel*.

```

delta = b * b - 4 * a * c
if delta > 0 :
    print("L'équation a deux solutions réelles distinctes !")
elif delta == 0 :
    print("l'équation a une solution réelle double !")
else :
    print("L'équation n'a pas de solution réelle !")

```

Les clauses `elif` et `else` sont facultatives.

## 1 Instructions itératives

Pour répéter une opération un certain nombre de fois ou pour la répéter tant qu'une condition est vraie, nous disposons de *blocs itératifs*.

```
n, s = 15, 0 # Valeurs de n et s
for i in range(n) : # range(n) produit la liste des entiers de 0 à n-1
    s = s + i
print(s) # Somme des entiers de 0 à 14
```

```
n, s, i = 15, 0, 0 # Valeurs de n, s et i
while i < 15 :
    s = s + i
print(s)
```

Dans certaines situations, il est possible d'utiliser l'une ou l'autre des deux structures, dans d'autres cas, en fonction de la *perception* que l'on a de l'algorithme à mettre en place, nous serons amenés à choisir l'une plutôt que l'autre.

## 1

## Fonctions

La notion de fonction, essentielle en mathématiques a son équivalent en Python. Il suffit d'utiliser le mot clé `def` et de faire suivre l'algorithme qui permet le calcul de l'image en fonction des valeurs données en argument.

```
def vabs(x) : # Calcul de la valeur absolue d'un nombre
    if x >= 0 :
        return x # x est retourné si x >= 0
    else :
        return -x # -x est retourné si x < 0
vabs(-3.8 * a) # Calcul de la valeur absolue d'une expression
```

Lorsque la définition est courte, nous pouvons faire appel à la notion de fonction `lambda`, elle dispense de l'usage de l'instruction `return`.

Les deux points ( : ) séparent ici les arguments de la fonction (arguments) de sa valeur de retour (expression).

```
carre = lambda x : x * x # le second membre est une fonction anonyme
carre(-4) # Calcul du carré de -4
```

En réalité, cette structure peut être utilisée dans un cadre plus général sans produire de valeur en retour ; elle peut servir en particulier à transformer des variables existantes, on parle alors de *procédure*.

Les variables définies à l'intérieur d'une fonction ont une *portée locale*, elles

n'existent pas en dehors. Les variables définies à l'extérieur mais utilisées à l'intérieur sont bien sûr affectées par les opérations effectuées.

Un grand intérêt des fonctions ou procédures est de permettre la *segmentation* du programme source, d'éviter les répétitions et d'augmenter la lisibilité de celui-ci.

## ①

**Structures de données**

En dehors des variables qui constituent les *données élémentaires* utilisées par un programme, il existe des *structures de données* plus complexes, en particulier les *listes* et les *tuples*.

```
a = [1, 2, 3, "Soleil !"]           # a est une liste
b = (4, 5)                        # b est un tuple
print(a[2])                       # affichage de l'élément de rang 2 de a : 3
print(b[0])                       # affichage de l'élément de rang 0 de b : 4
a[0] = 3                          # modification de la valeur de l'élément 0 de a
```

La différence essentielle entre les listes et les tuples est qu'une fois défini un tuple n'est plus modifiable, ainsi on dispose de données dont on sait qu'elles sont figées.

La complexité des structures de données peut s'entrevoir ici, il suffit d'envisager une liste de listes (matrice par exemple), etc.

**3.2 Méthodes numériques**

## ①

**Bibliothèques**

En programmation, il n'est pas toujours utile de réinventer la roue, il existe des bibliothèques dans lesquelles nous pouvons puiser des fonctions ou procédures.

Pour utiliser ces bibliothèques, il faut les déclarer, ceci pouvant se faire de plusieurs manières suivant que l'on veut tout utiliser ou seulement une partie, en ayant à préfixer (en simplifiant le nom éventuellement) ou pas les éléments empruntés.

```
import sys
from math import *
from random import randint
```

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

①

## Méthodes

Le véritable art de la programmation s'apprend dans l'écriture d'algorithmes progressivement complexes. Les méthodes numériques constituent un domaine d'expérimentation très riche : méthode du pivot de Gauss, approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes, méthode d'Euler pour la résolution d'équation différentielle...

```
def Euler(f, xi, xf, yi, n) : x, y = xi, yi                # Initialisations
    lx = [x]                                             # liste des x
    ly = [y]                                             # liste des y
    h = (xf - xi) / n                                    # pas de la méthode
    for in range(n) :                                   # Approximation pas à pas
        y = y + h * f(x, y)                             # y suivant
        x = x + h                                        # x suivant
        lx.append(x)
        ly.append(y)
    return (lx, ly)                                     # Retour des deux listes
```

## 3.3 Algorithmique avancée

②

## Piles

Une *pile* n'est rien d'autre qu'une liste pensée autrement. Au lieu de se représenter les éléments d'une liste côte à côte en se donnant la possibilité d'accéder à l'un quelconque d'entre eux via son index, on la pense comme des éléments empilés les uns au-dessus des autres, le dernier élément étant le seul accessible. Cette notion de pile peut s'avérer utile dans la constitution d'algorithmes, en particulier dans leur clarification.

```
def Creation() :                                       # Création d'une pile, elle est vide au départ !
    return []
def Empile(p, v) :                                    # Mettre l'élément v sur la pile p
    p.append(v)
```

```
def Depile(p) :      # Retourner et supprimer l'élément au-dessus de la pile
    return p.pop()
```

Peu d'instructions suffisent pour gérer une pile !

## 2

## Récurtivité

Dans certains cas, plutôt qu'utiliser un bloc itératif, il paraît quelquefois plus simple de structurer un algorithme en faisant en sorte qu'il s'utilise lui-même de façon répétée jusqu'à l'obtention du résultat attendu. On parle alors d'*algorithme récursif*.

```
def u(f, n, u0) :      # Calcul de  $u_n$  sachant que  $u_n = f(u_{n-1})$  et  $u_0 = u0$ 
    if n == 0 :
        return u0
    else :
        return f(u(f, n-1, u0))      #  $u$  est appelé ici !
        # La fonction utilisée dans l'appel suivant est  $f : x \rightarrow 2x + 3$ 
print(u(lambda x : 2 * x + 3, 10, 1))
```

La récursivité permet d'avoir une écriture compacte, la complexité peut être importante malgré tout. Il est toujours possible de donner une version itérative d'un algorithme récursif.

## 2

## Tris

Une activité courante en programmation est le tri de données, en particulier le tri d'une liste de nombres. Il existe une grande variété d'algorithmes de complexités variables. Le *tri par insertion* est simple à appréhender, c'est un tri en place (la liste triée est transformée), il est *stable* (deux éléments de même valeur auront des positions dont l'ordre est conservé), de *complexité quadratique* (de l'ordre de  $n^2$ ,  $n$  étant la taille de la liste) dans la plupart des cas.

```

def triInsertion(L) :
    for i in range(1, len(L)) :                # Parcours de la liste
        j, t = i - 1, L[i]
        while j >= 0 and L[j] > t :          # Décalage vers la droite
            L[j + 1] = L[j]
            j -= 1
        L[j+1] = t                            # Placement

```

Le *tri rapide* (ou *quicksort*) est un algorithme de la famille diviser pour régner. L'algorithme présenté ici ne trie pas en place, il n'est pas stable mais sa complexité est en moyenne de l'ordre de  $n \ln(n)$ .

```

def triRapide(L) :
    n = len(L)
    if n <= 1 :
        return L
    else :
        pivot = L[len(L) // 2]
        inferieurs = triRapide([x for x in L if x < pivot])
        superieurs = triRapide([x for x in L if x >= pivot])
        return inferieurs + [pivot] + superieurs

```

Le codage ci-dessus n'est pas vraiment optimisé mais il montre la compacité que l'on peut atteindre avec le mode de création des listes en *compréhension*.

## 4. Bases de données

Les bases de données relationnelles contiennent des tables à deux dimensions, les lignes contiennent les *enregistrements* et les colonnes désignent les *attributs*.

Les informations élémentaires sont donc à l'intersection d'une ligne et d'une colonne. Un système de gestion de base de données (SGBD) propose différentes instructions pour isoler les informations recherchées (faire des *requêtes*).

Chaque attribut d'une table possède un type fixé : numérique, chaîne de caractères, etc. autorisant certaines opérations ou non.

## ①

## L'instruction SELECT

L'instruction SELECT a deux fonctions, l'affichage et la construction de nouvelles tables, déduites des tables existantes.

```
SELECT "Bonjour tout le monde !", 5, 32.0/8
```

## ①

## Projection

Affichage de tous les enregistrements avec tous leurs attributs (\* est un *joker*) ; c'est en quelque sorte l'opération *identité*.

```
SELECT * FROM table1
```

Affichage de tous les enregistrements avec certains, seulement, de leurs attributs ; c'est une projection ou une réduction de table en colonnes.

```
SELECT nom, prenom FROM table1
```

Cette instruction provoquera l'affichage des attributs nom et prenom de tous les enregistrements contenus dans la table table1, elle se note :

$$\pi_{\text{nom, prenom}}(\text{table1}).$$

```
SELECT pays, population/superficie FROM table2
```

La table construite ici possède un attribut (population/superficie) absent de la table initiale mais *calculé* à partir des attributs de celle-ci.

## ①

## Sélection

Pour ne sélectionner que certains enregistrements, répondant à une condition, on utilise la clause WHERE.

```
SELECT nom, prenom FROM table1 WHERE annee > 1990
```

La table obtenue est constituée des attributs nom et prénom pour les enregistrements dont l'attribut annee (de naissance, par exemple) est supérieur à 1990. Notation :

$$\pi_{\text{nom, prenom}}(\sigma_{\text{annee}>1990}(\text{table1})).$$

Comme on peut le retrouver dans la notation, deux opérations successives ont été effectuées : *sélection* des enregistrements puis *projection* des attributs.

Les opérations de sélection ne se limitent pas à des comparaisons directes, elles peuvent s'obtenir à partir de calculs plus complexes.

```
SELECT pays, superficie FROM table2
WHERE population/superficie > 100
ORDER BY pib ASC
```

Ici, on sélectionne les enregistrements dont le quotient entre population et superficie est supérieur à 100, ces enregistrements sont classés dans le sens croissant de l'attribut pib .

1

## Renommage

Pour rendre plus claire une requête, il est possible de renommer un attribut (existant déjà ou calculé).

```
SELECT pays, population/superficie AS densite FROM table2
WHERE densite > 100
ORDER BY densite DESC
```

Notation :

$\rho_{\text{population/superficie} \rightarrow \text{densite}}(\pi_{\text{pays, population/superficie}} \sigma_{\text{population/superficie} > 100}(\text{table1}))$ .

1

## Opérations ensemblistes

Si des requêtes proposent, en sortie, des enregistrements avec les mêmes attributs dans le même ordre, il est possible d'en faire l'union (UNION) ou l'intersection (INTERSECT) et d'autres opérations qui dépendent du logiciel de traitement de base de données utilisé.

Le produit cartésien de deux tables est toujours possible. Si les deux tables ont respectivement  $n_1$  et  $n_2$  enregistrements ayant  $p_1$  et  $p_2$  attributs alors le produit cartésien contiendra  $n_1 \times n_2$  enregistrements ayant  $p_1 + p_2$  attributs...

```
SELECT * FROM table1, table2
```

Cette requête va croiser les enregistrements des tables table1 et table2 . C'est à éviter avec des tables conséquentes !

1

## Jointures

Pour croiser des tables sans passer par un produit cartésien qui contient beaucoup d'informations non pertinentes, on utilise des *jointures*. L'association entre les lignes d'une table et celles d'une autre se fait via la correspondance des valeurs dans des colonnes de l'une et de l'autre.

```
SELECT * FROM table1 JOIN table2 On table1.id = table2.id
```

Dans la jointure ci-dessus, on suppose l'existence de deux tables distinctes contenant des informations relatives aux mêmes objets, parfaitement identifiés par un attribut unique (*clé primaire*).

La jointure joint les deux tables pour en constituer une troisième sur laquelle nous pouvons construire des requêtes. Il y a lieu de faire attention aux attributs, il faut les pointer à la table dans laquelle ils sont définis.

```
SELECT p.Nom
      FROM Pays AS p JOIN Continents AS c ON p.Code = c.Code
      WHERE c.Continent = 'Europe'
      AND p.Population / p.Superficie < 10
```

Une activité formatrice est de déduire de la formulation d'une requête un contenu minimal des tables concernées ainsi que l'objet réel de la requête.

## 1

## Agrégation

Les enregistrements d'une table dont un attribut possède la même valeur peuvent être agrégés (**GROUP BY**) et des calculs peuvent être effectués sur ces regroupements.

```
SELECT p.Nom
      SELECT Continent, MAX(Population), Nom FROM Pays
      GROUP BY Continent
      HAVING Population = MAX(Population)
```

Il existe bien sûr d'autres fonctions que **MAX** qui portent sur les enregistrements agrégés.

Le mot clé **HAVING** sert à effectuer une sélection à l'intérieur d'un regroupement.

# Physique

## 1. Étude du signal

### 1.1 Oscillateur harmonique non amorti (ressort horizontal)

#### 1 Équation différentielle

$$m \frac{d^2x}{dx^2} = -kx \quad \text{soit} \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$m$  : masse (kg)

$x = \ell - \ell_0$  : allongement (m)

$k$  : constante de raideur du ressort (N.m<sup>-1</sup>)

$\omega$  : pulsation (rad.s<sup>-1</sup>)

#### 1 Solution de l'équation différentielle

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$x_m$  et  $\varphi$  déterminées grâce aux conditions initiales

$x_m$  : amplitude de l'allongement (m)

$\omega$  : pulsation (rad.s<sup>-1</sup>)

$t$  : temps (s)

$\varphi$  : phase à l'origine (rad)

#### 1 Période, fréquence et pulsation

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{ici} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$T$  : période de l'oscillation (s)

$f$  : fréquence (aussi notée  $\nu$ ) (Hz)

$\omega$  : pulsation (rad.s<sup>-1</sup>)

$m$  : masse (kg)

$k$  : constante de raideur (N.m<sup>-1</sup>)

#### 1 Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{ici} \quad v = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$E_c$  : énergie cinétique (J)

$m$  : masse (kg)

$v$  : vitesse (m.s<sup>-1</sup>)

$x$  : allongement (m)

## ① Énergie potentielle élastique

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

$E_{pe}$  : énergie potentielle élastique (J)  
 $k$  : constante de raideur ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )  
 $x$  : allongement (m)

## ① Énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p$$

ici 
$$E_m = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)$$

$E_m, E_c, E_p$  : énergies mécanique, cinétique et potentielle (J)  
 $m$  : masse (kg)  
 $k$  : constante de raideur ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )  
 $x$  : allongement (m)

## ① Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{ici : } m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = 0$$

soit  $mx + kx = 0$

$E_m$  : énergie mécanique (J)  
 $m$  : masse (kg)  
 $k$  : constante de raideur ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )  
 $x$  : allongement (m)

## 1.2 Propagation du signal

### ① Signal électrique

- Courant électrique : déplacement d'ensemble des particules chargées (les porteurs de charge). Par convention, son sens est celui des porteurs de charge positive.
- Intensité (du courant électrique) : charge totale traversant un conducteur de section  $S$  pendant une durée  $\Delta t$ . Se mesure avec un ampèremètre.
- Tension : différence de potentiel entre deux points d'un circuit électrique. Se mesure avec un voltmètre.

### ① Signal acoustique

(Déplacement du signal sous forme d'une onde)

- Intensité ou puissance acoustique : puissance reçue par unité de surface.
- Intensité ou niveau sonore : mesure logarithmique du son par rapport à une intensité acoustique de référence (s'exprime en décibel, de symbole dB).

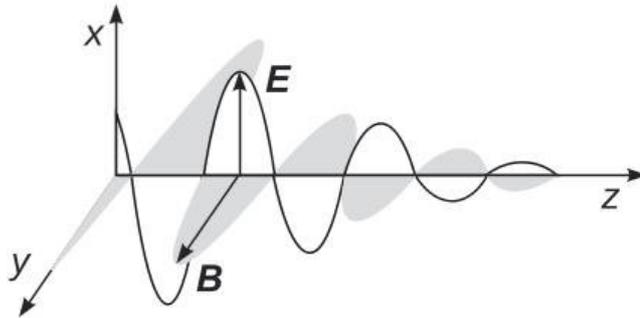
①

## Signal électromagnétique

(Déplacement du signal sous forme d'une onde)

- Onde électromagnétique : onde composée d'un champ électrique et d'un champ magnétique variant dans le temps et se propageant dans toutes les directions.

- Représentation :



①

## Onde plane progressive

- Onde plane : même valeur en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

- Onde progressive dans le sens des  $x$  croissants puis décroissants :

$$\Psi(x, t) = f(x - ct)$$

$$\Psi(x, t) = g(x + ct)$$

$\Psi$  : fonction se propageant (ex : champ électrique)

$x$  : position (m)

$c$  : célérité de l'onde ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

$t$  : temps (s)

- Retard temporel : une perturbation en M à l'instant  $t$  arrive en M' à l'instant  $t'$  donc avec un retard temporel  $\tau = t' - t$ .

①

## Onde progressive sinusoïdale

- Caractéristiques :

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

$\lambda$  : longueur d'onde ou période spatiale (m)

$c$  : célérité de l'onde ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

$T$  : période (temporelle) (s)

$\nu$  : fréquence (aussi notée  $f$ ) (Hz)

- Forme de la fonction (pour les  $x$  croissants puis décroissants) :

$$\Psi(t) = \Psi_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi \right]$$

$$\Psi(t) = \Psi_m \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + \varphi \right]$$

$\Psi$  : fonction se propageant  
 $\Psi_m$  : amplitude de la fonction  
 $\omega$  : pulsation ( $\text{rad.s}^{-1}$ )  
 $t$  : temps (s)  
 $x$  : position (m)  
 $c$  : célérité de l'onde ( $\text{m.s}^{-1}$ )  
 $\varphi$  : phase à l'origine ( $^\circ$ )

### 1

## Interférences

- L'interférence résulte de la superposition de deux ondes de même nature et de même fréquence. Les sources émettrices de ces ondes doivent être cohérentes.
- Différence de marche : différence entre les distances d'un point à chaque source :  $\delta = d_2 - d_1$ .
- Il y a interférence constructive lorsque les ondes sont en phase (la différence de marche est un multiple entier de longueur d'onde) et interférence destructive lorsque les ondes sont en opposition de phase (la différence de marche est un multiple impair de demi-longueur d'onde).

### 1

## Onde mécanique – onde stationnaire

Onde stationnaire : il y a deux ondes mécaniques qui se croisent mais, vu de loin, le système paraît immobile.

Les ventres sont des zones d'interférence constructive tandis que les nœuds sont des zones d'interférence destructive.

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$L$  : longueur de la corde (m)  
 $n$  : nombre de fuseaux (sans dimension)  
 $\lambda$  : longueur d'onde (m)  
 $\nu$  : fréquence propre (Hz)  
 $F$  : tension de la corde (N)  
 $\mu$  : masse linéique ( $\text{kg.m}^{-1}$ )

**1 Onde lumineuse – diffraction à l’infini**

Par une fente :  $\ell \approx 2 \frac{\lambda d}{a}$

Par un trou :  $\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{D}$

$\ell$  : largeur de la tache centrale (m)  
 $\lambda$  : longueur d’onde (m)  
 $d$  : distance fente-écran (m)  
 $a$  : largeur de la fente (m)  
 $\theta$  : rayon angulaire de la tache centrale (rad)  
 $D$  : diamètre du trou (m)

**1.3 Circuits électriques**

**1 Intensité du courant**

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$I$  : intensité du courant (A)  
 $q$  : charge (C)  
 $t$  temps (s)

**1 Tension électrique**

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

$U_{AB}$  : tension entre les bornes  $A$  et  $B$  (V)  
 $V_A$  et  $V_B$  : potentiels en  $A$  et  $B$  (V)

**1 Première loi de Kirchhoff – loi des nœuds**

$$\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$$

$i_k$  : intensité du courant circulant dans la branche  $k$  (A)  
 $\varepsilon_k = 1$  si le courant d’intensité  $i_k$  arrive au nœud ;  $\varepsilon_k = -1$  s’il en part

**1 Deuxième loi de Kirchhoff – loi des mailles**

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$$

$u_k$  : tension de la portion  $k$  (V)  
 $\varepsilon_k = 1$  si  $u_k$  est orienté dans le sens de la maille (choisi arbitrairement) ;  
 $\varepsilon_k = -1$  sinon

①

## Puissance

Puissance reçue par un récepteur

$$\mathcal{P}_r(t) = u(t)i(t)$$

en convention récepteur

Puissance cédée par un générateur

$$\mathcal{P}_c(t) = u(t)i(t)$$

en convention générateur

② PSI

## Puissance moyenne en régime sinusoïdal

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

 $P$  : puissance moyenne ou puissance active reçue sur une période (W) ; $p(t)$  : puissance instantanée reçue par le dipôle (W) ; $T$  : période des grandeurs sinusoïdales (s).

$$P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi_{u/i}$$

 $P$  : puissance moyenne ou puissance active reçue sur une période (W) ; $I_{eff}$  : valeur efficace de l'intensité du courant électrique (A) ; $U_{eff}$  : valeur efficace de la tension électrique aux bornes du dipôle (V) ; $\varphi_{u/i}$  : déphasage de la tension par rapport à l'intensité (rad) ; $\cos \varphi_{u/i}$  : facteur de puissance (sans dimension).

①

## Loi de Pouillet (valable pour une seule maille)

$$i = \frac{\sum_k \varepsilon_k e_k}{\sum_\ell R_\ell}$$

 $e_k$  : tension de la source dans la portion  $k$  (V) $\varepsilon_k = 1$  si  $e_k$  et  $i$  sont orientés dans le même sens ( $i$  : intensité du courant (A)) ;  $\varepsilon_k = -1$  sinon $R_\ell$  : résistance de la portion  $\ell$  ( $\Omega$ )

①

## Loi d'Ohm – Puissance dissipée par effet Joule

$$u(t) = Ri(t)$$

$$\mathcal{P}_J(t) = Ri(t)^2$$

 $u$  : tension (V) $R$  : résistance ( $\Omega$ ) $i$  : intensité (A) $\mathcal{P}_J$  : puissance dissipée par effet Joule (W)

**1 Relation intensité - tension – Condensateur idéal**

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$i$  : intensité du courant (A)  
 $C$  : capacité du condensateur (F)  
 $u$  : tension aux bornes du condensateur (V)  
 $t$  : temps (s)

**1 Énergie électrique stockée dans un condensateur**

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}Cu^2$$

$\mathcal{E}_e$  : énergie électrique (J)  
 $C$  : capacité du condensateur (F)  
 $u$  : tension aux bornes du condensateur (V)

**1 Relation intensité - tension – Bobine idéale**

$$u = L \frac{di}{dt}$$

$u$  : tension aux bornes de la bobine (V)  
 $L$  : inductance de la bobine (H)  
 $i$  : intensité du courant (A)  
 $t$  : temps (s)

**1 Énergie magnétique stockée dans une bobine**

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$$

$\mathcal{E}_m$  : énergie magnétique (J)  
 $L$  : inductance de la bobine (H)  
 $i$  : intensité du courant (A)

**1 Modélisation d'un générateur réel**

Modèle de Thévenin :  $u = e - ri$

Modèle de Norton :  $i = \eta - \frac{u}{r}$

avec  $r = \frac{e}{\eta}$  (d'après la loi d'Ohm)

$u$  : tension (V)  
 $e$  : force électromotrice (fém) (V)  
 $r$  : résistance interne ( $\Omega$ )  
 $i$  : intensité du courant (A)  
 $\eta$  : courant électromoteur (cém) (A)

①

## Association de résistances

## Série

$$R_{\text{eq}} = \sum_k R_k$$

$R$  : résistance ( $\Omega$ )

## Dérivation

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \text{ou} \quad G_{\text{eq}} = \sum_k G_k$$

$G = \frac{1}{R}$  : conductance (S)

①

## Association de générateurs

**Modèle de Thévenin**  
(sources de tension en série)

$$e_{\text{eq}} = \sum_k \varepsilon_k e_k$$

$\varepsilon_k = +1$  si  $e_k$  (resp.  $\eta_k$ ) et  $e_{\text{eq}}$  (resp.  $\eta_k$ ) sont dans le même sens  
 $\varepsilon_k = -1$  si  $e_k$  (resp.  $\eta_k$ ) et  $e_{\text{eq}}$  (resp.  $\eta_k$ ) sont en sens opposés

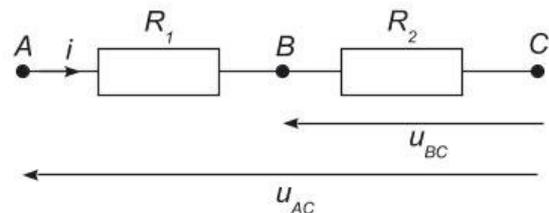
**Modèle de Norton** (sources  
de courant en dérivation)

$$\eta_{\text{eq}} = \sum_k \varepsilon_k \eta_k$$

①

## Diviseur de tension

$$u_{BC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_{AC}$$



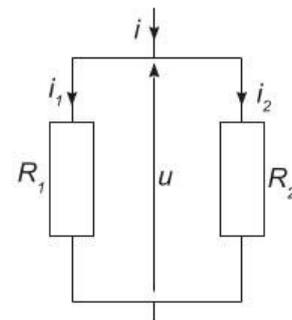
①

## Diviseur de courant

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

ou

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$



$G = \frac{1}{R}$  : conductance (S)

**1 Charge du condensateur (1 maille – cas idéal)**

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$u_C$  : tension aux bornes du condensateur (V)

$E$  : tension du générateur (V)

$R$  : résistance ( $\Omega$ )

$C$  : capacité (F)

$t$  : temps (s)

$i$  : intensité du courant (A)

**1 Décharge du condensateur (1 maille – cas idéal)**

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$$u_C(t) = E e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$u_C$  : tension aux bornes du condensateur (V)

$E$  : tension du générateur (V)

$R$  : résistance ( $\Omega$ )

$C$  : capacité (F)

$t$  : temps (s)

$i$  : intensité du courant (A)

**1 Établissement du courant dans la bobine (1 maille – cas idéal)**

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{R\tau} = \frac{E}{L} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$u_L(t) = E e^{-t/\tau}$$

$i$  : intensité du courant (A)

$E$  : tension du générateur (V)

$R$  : résistance ( $\Omega$ )

$L$  : inductance (H)

$t$  : temps (s)

$u_L$  : tension aux bornes de la bobine (V)

### ① Rupture du courant dans la bobine (1 maille – cas idéal)

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$u_L(t) = -E e^{-t/\tau}$$

$i$  : intensité du courant (A)

$E$  : tension du générateur (V)

$R$  : résistance ( $\Omega$ )

$L$  : inductance (H)

$t$  : temps (s)

$u_L$  : tension aux bornes de la bobine (V)

### ① Circuit LC idéal – régime libre

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

$$i(t) = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$u_C$  : tension aux bornes du condensateur (V)

$\omega_0$  : pulsation propre ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

$L$  : inductance (H)

$C$  : capacité (F)

$E$  : tension du générateur (V)

$t$  temps (s)

$i$  : intensité du courant (A)

### ① Circuit RLC série – régime libre

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

équation caractéristique :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

$Q$  : facteur de qualité (sans dimension)

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{R}{2L}$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$$\Omega = \omega_0^2 - \lambda^2$$

• si  $\Delta' > 0$  soit  $Q < \frac{1}{2}$  : régime apériodique  $r = -\lambda \pm \sqrt{\Delta'}$

$$u = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

• si  $\Delta' = 0$  soit  $Q = \frac{1}{2}$  : régime critique  $r = -\lambda = -\omega_0$

$$u = (At + B) e^{rt}$$

- si  $\Delta' < 0$  soit  $Q > \frac{1}{2}$  : régime pseudo-périodique  $r = -\lambda \pm j\sqrt{\Omega}$   
 $u = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

## 1 Analogie oscillateur mécanique amorti

**Ressort**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{\omega_0 m}{\alpha}$$

**Pendule simple**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad Q = \frac{\omega_0 m}{\alpha}$$

avec  $\vec{f}_d = -\alpha \vec{v}$  = force de frottement fluide (force dissipative)

## 1 Impédance et admittance complexe

**Cas général**

$$\underline{Z} = \frac{u}{i} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{i}{u}$$

**Résistance**

$$\underline{Z}_R = R$$

**Condensateur**

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

**Bobine**

$$\underline{Z}_L = jL\omega$$

$\underline{Z}$  : impédance complexe

$\underline{Y}$  : admittance complexe

## 1 Association d'impédances complexes

**Série**

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k$$

**Dérivation**

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k$$

soit 
$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_k \left( \frac{1}{\underline{Z}_k} \right)$$

## 2 PSI Puissance moyenne en fonction de l'impédance

$$P = \Re(\underline{Z}) \cdot I_{eff}^2 \quad \text{ou} \quad \Re(\underline{Y}) \cdot U_{eff}^2$$

$P$  : puissance active reçue par le dipôle (W) ;  
 $\underline{Z}$  : impédance complexe du dipôle ( $\Omega$ ) ;

$Y$  : admittance complexe du dipôle (S) ;

$\bar{I}_{eff}$  : valeur efficace de l'intensité du courant électrique (A) ;

$U_{eff}$  : valeur efficace de la tension électrique aux bornes du dipôle (V).

### 1 Valeur moyenne d'une grandeur périodique

$$\langle g(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$$

$\langle g(t) \rangle$  : valeur moyenne de la grandeur étudiée (ex : tension, intensité)

$T$  : période du signal (s)

$t$  : temps (s)

### 1 Valeur efficace d'une grandeur périodique

$$g_{eff} = \sqrt{\langle g^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt}$$

$$\neq \sqrt{\langle g(t) \rangle^2} = \langle g(t) \rangle$$

$g_{eff}$  : valeur efficace de la grandeur étudiée

$\langle g^2(t) \rangle$  : valeur moyenne du carré de la grandeur

$T$  : période du signal (s)

$t$  : temps (s)

### 1 Fonction de transfert - gain - phase

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20 \log H(\omega)$$

$$\varphi = \arg \underline{H}(j\omega)$$

$\underline{H}(j\omega)$  : fonction de transfert complexe

$H(\omega)$  : fonction de transfert réelle ou gain (sans dimension)

$G_{dB}$  : gain en décibel (dB)

$\varphi$  : déphasage de  $\underline{u}_s$  par rapport à  $\underline{u}_e$  (rad)

### 1 Diagramme de Bode

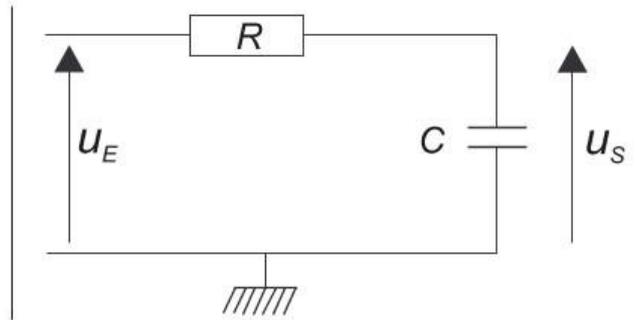
Le diagramme de Bode en gain (resp. en phase) représente le gain en décibel  $G$  (resp. le déphasage  $\varphi$ ) en fonction de  $\log \frac{\omega}{\omega_0}$  ou de  $\log \omega$  avec  $\omega$  la pulsation de l'excitateur (responsable du régime forcé).

①

## Filtre passe-bas d'ordre 1

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$\omega_c$  : pulsation de coupure

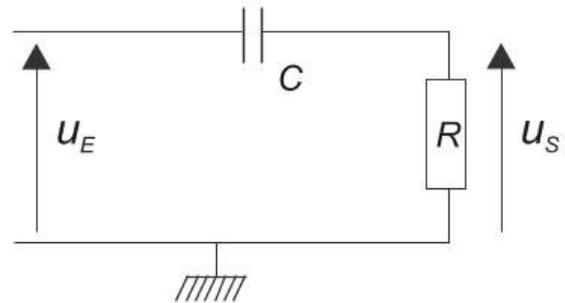


①

## Filtre passe-haut d'ordre 1

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$\omega_c$  : pulsation de coupure

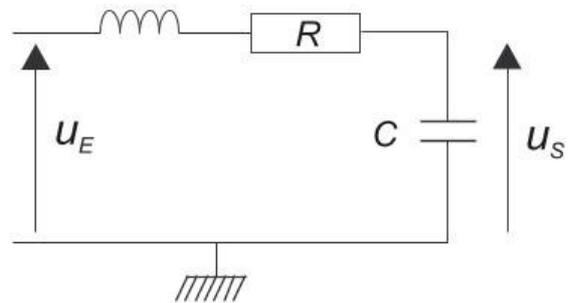


①

## Filtre passe-bas d'ordre 2

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

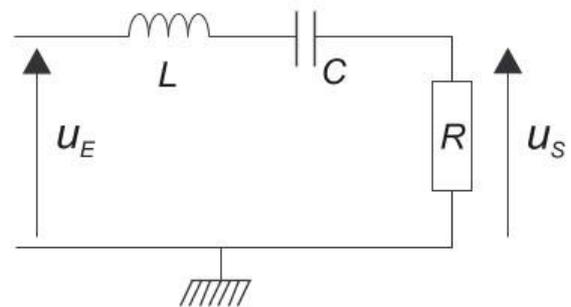
$\omega_c$  : pulsation de coupure



①

## Filtre passe-bande d'ordre 2

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \\ &= \frac{H'_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}\right)} \end{aligned}$$



## 2. Électronique

### 2.1 Stabilité des systèmes linéaires

② PSI

#### Systèmes linéaires

- Système linéaire invariant : système régi par une équation différentielle du type :

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y$$

$$= a_m \frac{d^m x}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x$$

$x$  : grandeur d'entrée du système ;

$y$  : grandeur de sortie du système ;

$\{a_k\}$  et  $\{b_l\}$  : coefficients réels liés aux caractéristiques physiques du système.

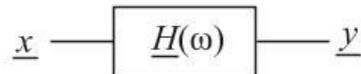
- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}$$

$\underline{H}(\omega)$  : fonction de transfert du système linéaire invariant ;

$n$  : ordre du système linéaire invariant.

- À une entrée sinusoïdale d'amplitude  $X_0$  correspond une sortie sinusoïdale d'amplitude  $Y_0 = |\underline{H}(\omega)| X_0$ , déphasée par rapport à  $x(t)$  de  $\varphi = \arg \underline{H}(\omega)$ .



② PSI

#### Stabilité des systèmes linéaires

- Un système linéaire invariant est stable s'il retourne spontanément vers son état d'équilibre après en avoir été écarté.
- Condition de stabilité d'un système linéaire invariant du premier ordre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_1(j\omega) + a_0}{b_1(j\omega) + b_0}$$

$b_0$  et  $b_1$  doivent tous les deux avoir même signe.

- Condition de stabilité d'un système linéaire invariant du second ordre de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}{b_2(j\omega)^2 + b_1(j\omega) + b_0}$$

$b_0, b_1$  et  $b_2$  doivent avoir même signe.

- Plus généralement, un système linéaire invariant de fonction de transfert  $\underline{H}$  est stable si, et seulement si, les racines du polynôme caractéristique :

$$b_n r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \dots + b_1 r + b_0 = 0$$

sont réelles négatives ou complexes conjuguées à parties réelles négatives.

## 2.2 L'amplificateur linéaire intégré et la rétroaction

### ② PSI

### Présentation

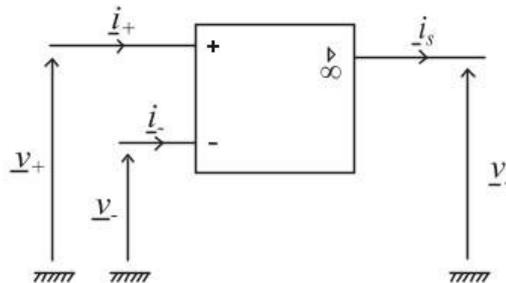
- Définition - nomenclature

$$\underline{v}_s = \underline{\mu}(\underline{v}_+ - \underline{v}_-)$$

$\underline{\mu}$  : gain différentiel en tension (sans unité) ;

$\underline{v}_s$  : tension entre la sortie et la masse du montage (V) ;

$\underline{v}_d = \underline{v}_+ - \underline{v}_-$  : tension différentielle d'entrée (V).



- Modèles d'A.L.I.

1. l'A.L.I. idéal ou parfait :

➤ le gain différentiel  $\underline{\mu} \rightarrow +\infty$  ;

➤ impédances différentielle d'entrée  $\underline{Z}_d$  et de mode commun  $\underline{Z}_{mc}$  tendent en module vers l'infini. D'où  $\underline{i}_+ = \underline{i}_- = 0$  ;

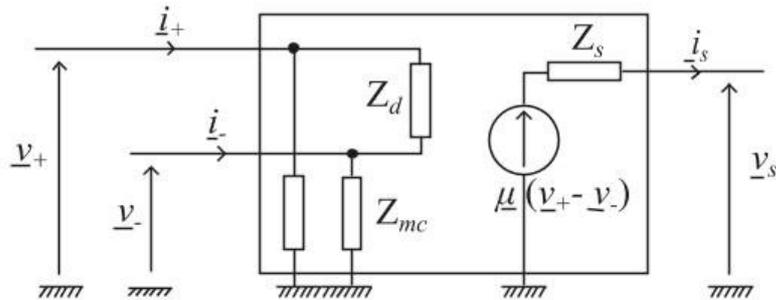
➤ l'impédance de sortie  $\underline{Z}_s = 0$ .

2. L'A.L.I. à gain différentiel passe-bas du premier ordre :

➤  $\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\tau\omega}$   $\mu_0$  très élevé mais fini ( $10^5 - 10^6$ ) ; les fréquences de coupure ( $1/2\pi\tau$ ) : 10 et 100 Hz.

➤ Les impédances d'entrée sont infinies ; l'impédance de sortie nulle.

3. Un troisième modèle tient compte des valeurs finies des impédances.



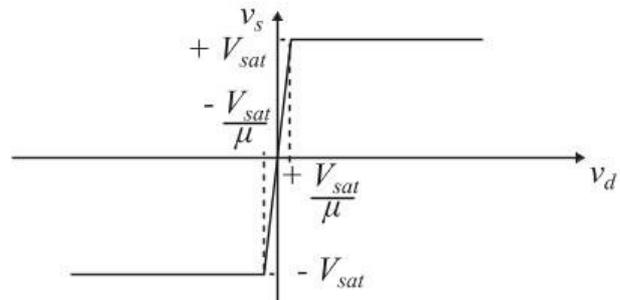
4. Un quatrième modèle tient compte des limitations de la tension et du courant de sortie de l'A.L.I.

• Caractéristique statique  $v_s(v_d)$  :

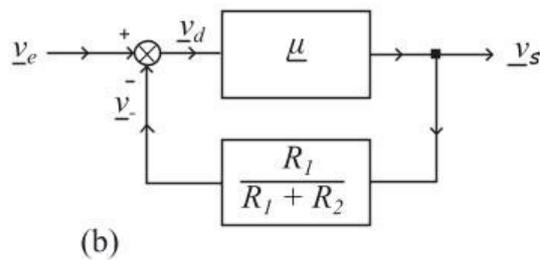
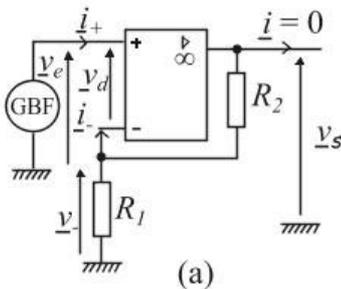
Pour traiter linéairement une gamme étendue de tensions de manière intéressante, l'A.L.I. est inséré dans des montages à contre-réaction ou à rétroaction.

Alors,  $v_d \in [-\frac{V_{sat}}{\mu} ; +\frac{V_{sat}}{\mu}]$

et  $\underline{v}_s = \underline{\mu} \underline{v}_d$ . L'A.L.I. fonctionne en régime linéaire.



**② PSI Exemple de rétroaction : le montage amplificateur non inverseur**



• Modèle 2 de l'A.L.I. utilisé :

$$\underline{i}_+ = \underline{i}_- \quad ; \quad \underline{v}_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{v}_s \quad ; \quad \underline{v}_s = \underline{\mu} \underline{v}_d = \underline{\mu} (\underline{v}_e - \underline{v}_-)$$

L'A.L.I. est l'organe actif : chaîne directe ; le bloc de fonction de transfert  $\frac{R_1}{R_1 + R_2}$  : chaîne de retour.

- Fonction de transfert du montage :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{\mu}} = H_0 \frac{1}{1 + j\tau'\omega}$$

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\tau\omega} ; H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mu_0} \text{ et } \tau' = \frac{H_0\tau}{\mu_0}.$$

- Équation différentielle liant les tensions d'entrée et de sortie :

$$\tau' \frac{dv_s}{dt} + v_s = H_0 v_e$$

$$H_0 \approx \frac{R_1 + R_2}{R_1} : \text{gain statique lorsque } \mu_0 \gg \frac{R_1 + R_2}{R_1} ;$$

$$f'_c = \frac{1}{2\pi\tau'} : \text{fréquence de coupure du montage bouclé ; } f'_c = f_c \left( 1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mu_0 \right) ;$$

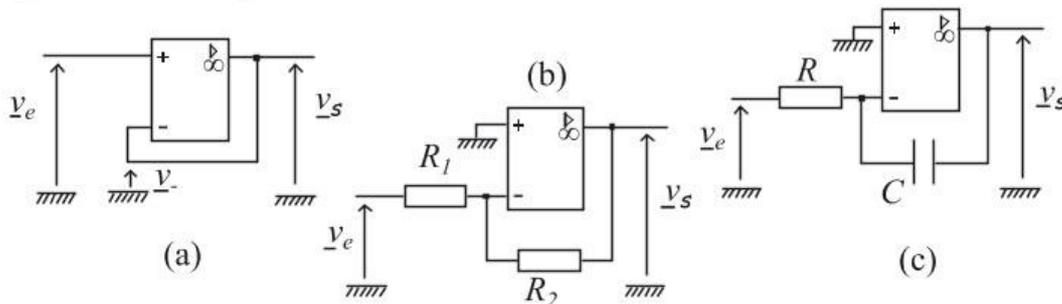
$f'_c \gg f_c$ , la fréquence de coupure de l'A.L.I.

$$H_0 \times f'_c = \mu_0 \times f_c$$

$\mu_0 \times f_c$  : produit gain bande (Hz).

## 2 PSI Quelques montages à rétroaction

- Comparateurs simples ou sans seuil



- (a) Montage suiveur ; (b) Montage amplificateur inverseur ;  
 (c) Montage intégrateur

• Théorème de Millmann

$$\underline{v}_A = \frac{\sum_{i=1}^N \underline{Y}_i \underline{v}_i}{\sum_{i=1}^N \underline{Y}_i}$$

$\underline{v}_A$  : potentiel d'un nœud auquel arrivent  $N$  branches ;  
 $\underline{Y}_i$  : admittance d'un dipôle de la branche  $i$  dont une borne est connectée à  $A$  ;  
 $\underline{v}_i$  : potentiel à l'autre borne du dipôle d'admittance  $\underline{Y}_i$ .

$$\underline{H}_a = \frac{v_s}{v_e} = 1 \quad ; \quad \underline{H}_b = -\frac{R_2}{R_1} \quad ; \quad \underline{H}_c = -\frac{1}{jRC\omega}$$

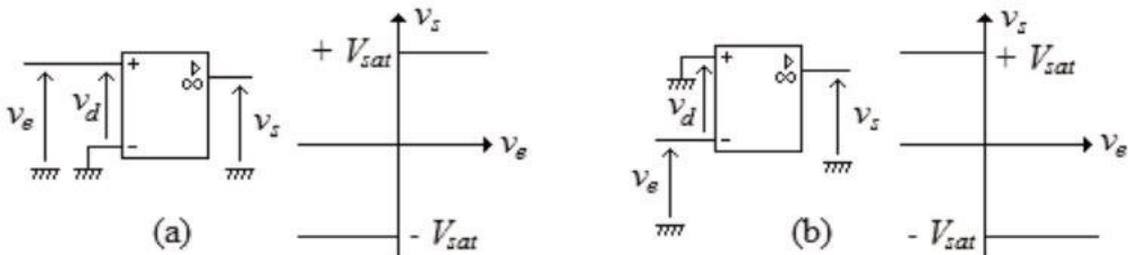
$\underline{H}_a$  : fonction de transfert du montage suiveur ;  
 $\underline{H}_b$  : fonction de transfert du montage amplificateur inverseur ;  
 $\underline{H}_c$  : fonction de transfert du montage intégrateur.

Les impédances d'entrée en général élevées et les impédances de sortie toujours petites de ces montages font qu'on peut les associer en cascade les uns aux autres sans provoquer d'influences notables entre eux.

### 2.3 L'A.L.I. et la réaction positive

#### ② PSI Montages non bouclés : les comparateurs simples

• Comparateurs simples ou sans seuil : schéma électrique

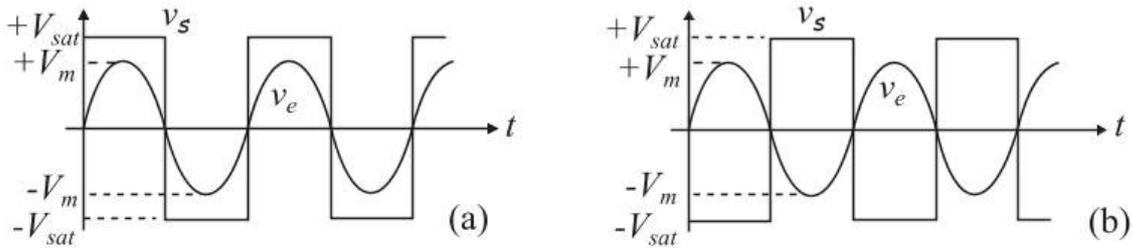


(a) comparateur positif ; (b) comparateur négatif

- Caractéristique de transfert

	Comparateur positif	Comparateur négatif
si $v_e > 0$	$v_s = +V_{sat}$	$v_s = -V_{sat}$
si $v_e < 0$	$v_s = -V_{sat}$	$v_s = +V_{sat}$

- Réponses à une tension sinusoïdale



Les tensions de sortie ne sont pas sinusoïdales, contrairement aux tensions d'entrée. Ceci traduit le caractère non linéaire des dispositifs en question.

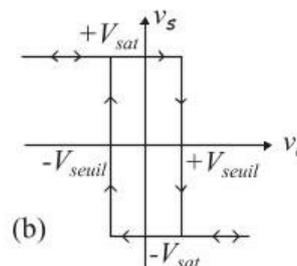
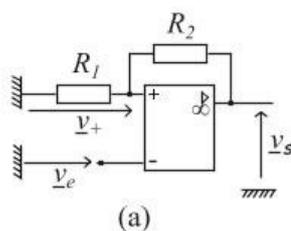
## ② PSI Montages à réaction positive

- Signalement d'une réaction positive : il y a réaction positive sur l'A.L.I. lorsqu'une liaison électrique externe existe entre son entrée non inverseuse et sa sortie.

- Méthode d'étude :

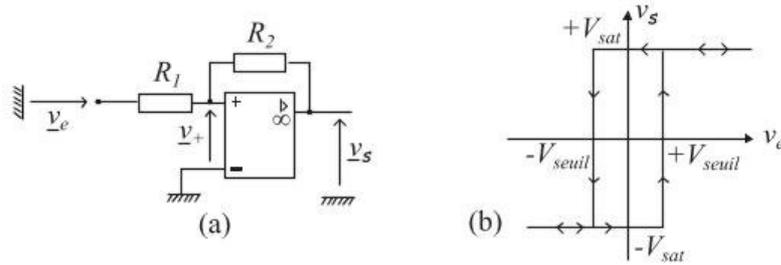
1. exprimer les tensions  $v_-$  et  $v_+$ , en fonction de la tension d'entrée du montage  $v_e$  et de sa tension de sortie  $v_s$
2. faire l'hypothèse  $v_s = +V_{sat}$  et en déduire une condition sur  $v_e$  sachant alors que  $v_- < v_+$
3. faire l'hypothèse  $v_s = -V_{sat}$  et en déduire une autre condition sur  $v_e$  sachant alors que  $v_+ < v_-$
4. tracer la courbe représentative de  $v_s(v_e)$ , appelée caractéristique de transfert du montage, traduisant les deux conditions obtenues.

- Comparateur à hystérésis négative



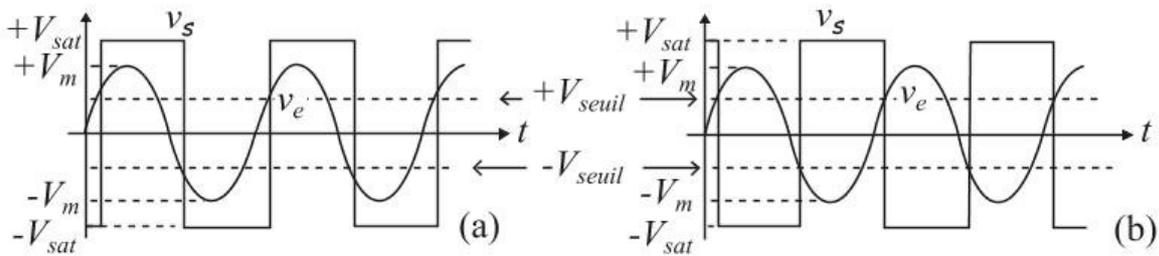
avec  $V_{seuil} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ .

• Comparateur à hystérésis positive



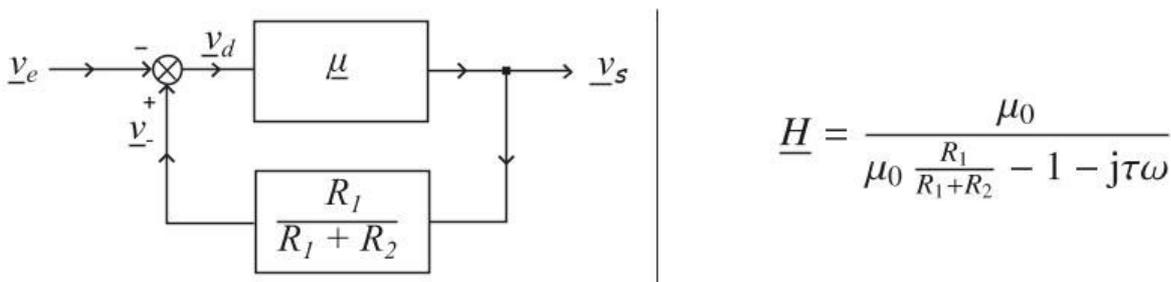
avec  $V_{seuil} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$ .

• Réponses à une tension sinusoïdale



**2 PSI Stabilité et réaction positive**

• Étude de la stabilité du comparateur à hystérésis négative : l’A.L.I. est modélisé par une fonction de transfert du type passe-bas du 1er ordre.



$H$  : fonction de transfert pendant une phase de fonctionnement linéaire ;  
 $\mu_0$  : gain statique de l’A.L.I. ;  
 $\tau$  : constante de temps du filtre passe-bas de son modèle ;  
 $R_1, R_2$  : résistances du montage.

• L’équation différentielle associée est :

$$-\tau \frac{dv_s}{dt} + \left( \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right) v_s = \mu_0 v_e$$

Les coefficients du membre de gauche de l’équation différentielle ne sont pas

de même signe en pratique car  $\mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \gg 1$ . Le montage est instable : il y a divergence de la tension de sortie.

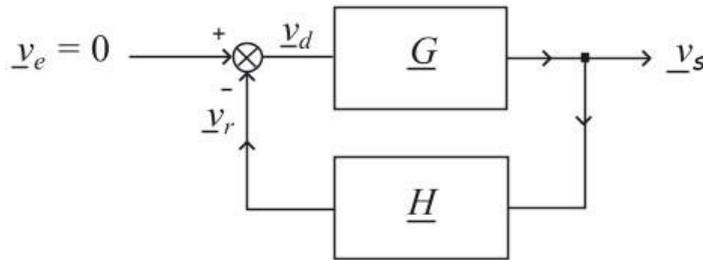
## 2.4 Les oscillateurs

### ② PSI Définition

Oscillateur : système bouclé instable capable de générer un signal de sortie périodique (une tension entre la sortie et la masse du montage) en l'absence de signal d'entrée.

### ② PSI Les oscillateurs quasi sinusoïdaux

- Structure



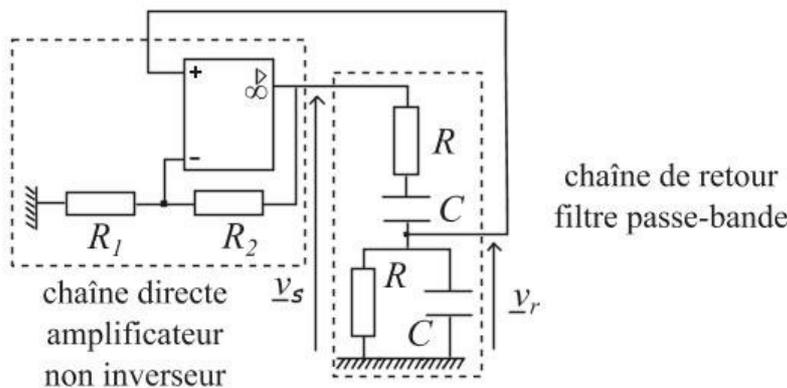
- Condition d'oscillation

$$\underline{G} \underline{H} = -1$$

$\underline{G}$  : fonction de transfert de la chaîne directe (A.L.I.) ;

$\underline{H}$  : fonction de transfert de la chaîne de retour (passe-bande).

- Exemple : l'oscillateur à pont de Wien



Chaîne directe : A.L.I. en amplificateur non inverseur ; gain  $\underline{G} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$  ;

Chaîne de retour : filtre  $\underline{H} = \frac{1}{3} \frac{j\tau\omega}{1 - (\tau\omega)^2 + j\tau\omega}$  avec  $\tau = RC$ .

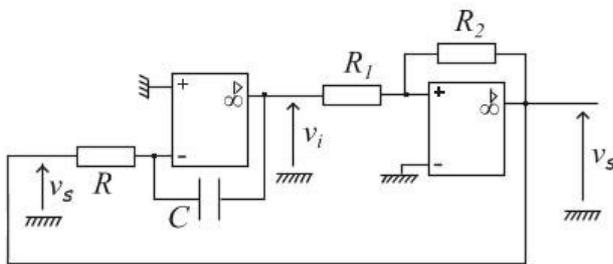
Condition d'oscillation :  $\omega = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$  et  $1 + \frac{R_2}{R_1} = 3$ . Sa tension de sortie est régie par la relation  $\underline{v}_s = G\underline{H}\underline{v}_s$  d'équation différentielle associée :

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{d v_s}{dt} + \left(1 - \frac{G}{3}\right) v_s = 0$$

$G > 3$  en pratique : les trois coefficients de l'équation caractéristique ne sont pas de même signe donc le système est instable.

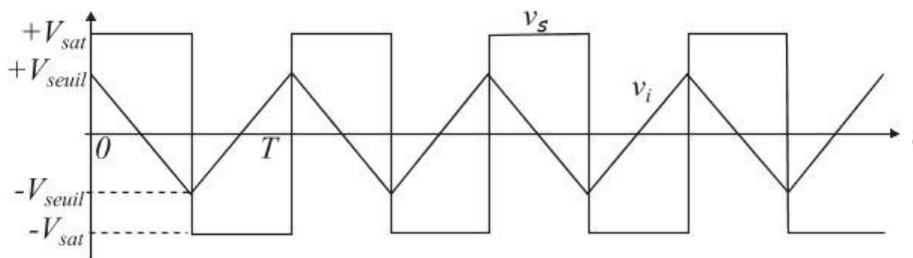
## ② PSI Les oscillateurs de relaxation

- Exemple d'oscillateur à A.L.I.



constitué d'un montage intégrateur suivi d'un comparateur à hystérésis positive dont la tension de sortie fournit la tension d'entrée de l'intégrateur.

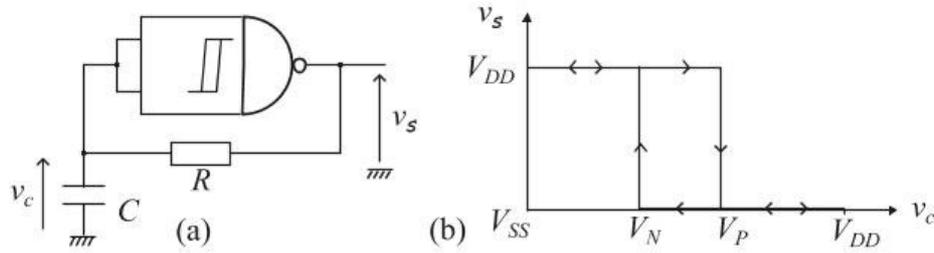
- Graphe des tensions  $v_s$  et  $v_i$



$$T = 4RC \frac{V_{seuil}}{V_{sat}} = 4RC \frac{R_1}{R_2}$$

$T$  : période de  $v_i$  et de  $v_s$ .

- Un exemple à porte logique :



(a) Oscillateur de relaxation à porte NAND ; (b) Caractéristique de transfert de la porte logique.

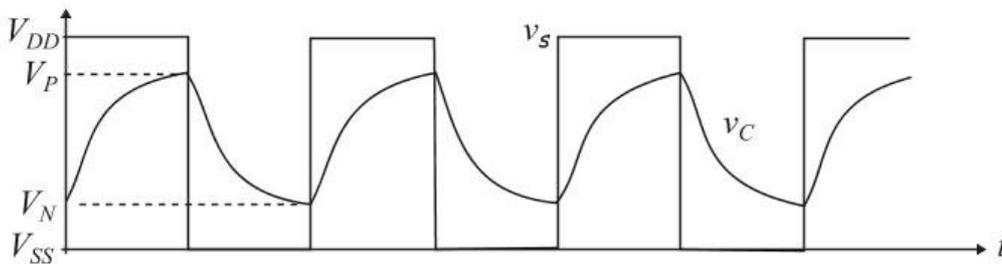
Les équations différentielles régissant la tension  $v_C$  sont :

$$\tau \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_{SS} \quad \text{avec} \quad v_C(0) = V_P \quad (1)$$

$$\tau \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_{DD} \quad \text{avec} \quad v_C(0) = V_N \quad (2)$$

avec  $\tau = RC$ . La phase (1) s'achève lorsque  $v_C = V_N$  ; la phase (2), lorsque  $v_C = V_P$ .

Elles conduisent aux graphes de  $v_C$  et  $v_s$  :



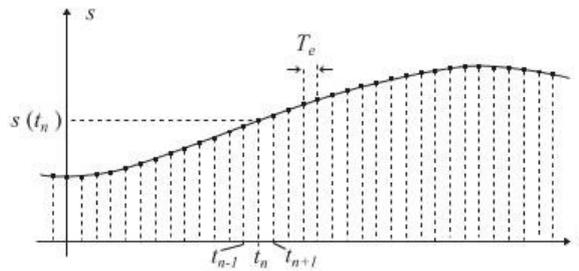
$$T = T_1 + T_2 = \tau \ln \left( \frac{V_P - V_{SS}}{V_N - V_{SS}} \right) + \tau \ln \left( \frac{V_{DD} - V_N}{V_{DD} - V_P} \right)$$

$T$  : période de l'oscillateur.

## 2.5 L'échantillonnage

### 2 Définitions

- L'échantillonnage d'un signal  $s$  est le prélèvement de ses valeurs pour une suite d'instants discrets  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , qui conduit à l'ensemble  $\{s(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .
- L'échantillonnage du signal est périodique si les instants d'échantillonnage sont de la forme :  $t_n = t_0 + n.T_e$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$  ;  $t_0$  est un instant arbitraire et  $T_e$  est la période d'échantillonnage ; son inverse  $f_e$ , est la fréquence d'échantillonnage.



## ② Le théorème d'échantillonnage de Shannon

L'ensemble des échantillons  $\{s(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  du signal  $s$  est une représentation de  $s$  si les deux conditions suivantes sont remplies :

1. le signal  $s$  est à spectre borné de fréquence maximale  $\nu_M$  ;
2. l'échantillonnage est périodique de période  $T_e$  ou de fréquence  $f_e = 1/T_e$  telle que  $f_e > 2 \nu_M$ , appelée condition de Shannon.

## ② Repliement du spectre

- Le repliement du spectre est la modification de la fréquence apparente d'un signal sinusoïdal échantillonné lorsque la période d'échantillonnage n'est pas conforme à la condition de Shannon.
- L'important dans la condition de validité de l'échantillonnage est que le spectre de  $s$  soit borné.
- Il est souvent nécessaire de borner artificiellement le spectre d'un signal, quitte à lui faire perdre un peu d'information. On le filtre à l'aide d'un filtre passe-bas qui limite sa bande spectrale de façon à ce que l'on puisse fixer une fréquence d'échantillonnage conforme à la condition de Shannon, pour les fréquences restantes inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

## ② Formule d'échantillonnage

Formule de reconstitution du signal  $s$  à partir de la suite de ses échantillons recueillis dans les conditions de Shannon,  $\{s(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \nu_M}{f_e} s(t_n) \operatorname{sinc}(2\pi \nu_M (t - t_n))$$

où « sinc » désigne le sinus cardinal  $\frac{\sin u}{u}$  .

## 2.6 Filtrage numérique du signal

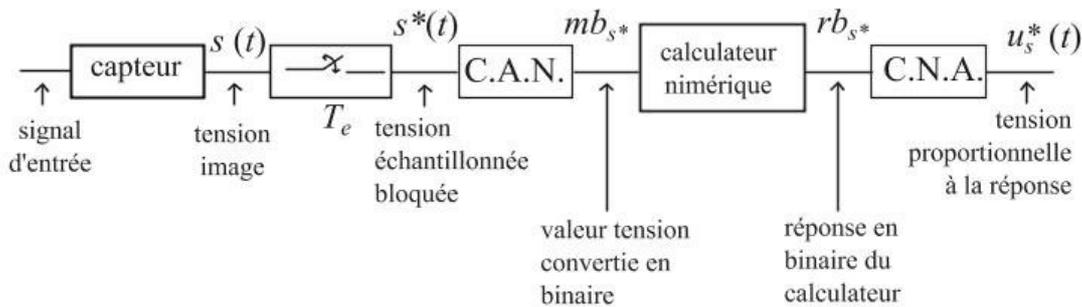
②

### Introduction

Description d'une chaîne de traitement numérique constituée :

- d'un capteur qui convertit le signal en une tension qui lui est proportionnelle ;
- d'un échantillonneur - bloqueur ;
- d'un convertisseur analogique/numérique (C.A.N.) ;
- d'un calculateur ;
- d'un convertisseur numérique/analogique (C.N.A.) ;
- éventuellement d'un filtre passe-bas d'atténuation des discontinuités de la fonction en escalier.

Synoptique d'un traitement numérique du signal



②

### Filtre numérique

- Filtre numérique ou discret linéaire : protocole de calcul, caractérisé par un ensemble de nombres réels fixés  $\{h_n\}$ , des échantillons de sortie en fonction d'échantillons d'entrée :

$$\forall n \quad y_n = \sum_m x_m h_{n-m} = \sum_m x_{n-m} h_m$$

- $\{h_n\}$  est la réponse impulsionnelle du filtre. C'est la réponse qu'il donne du signal particulier différent de 0 au seul instant fixé comme origine.
- La causalité implique :

$$\forall n \quad y_n = \sum_{m \geq 0} x_{n-m} h_m$$

②

### Réponse à un signal sinusoïdal

- Signal d'entrée  $x$  sinusoïdal de fréquence  $\nu$  échantillonné :

$$x_n = X \cos(2\pi \nu n T_e)$$

où  $2\nu T_e < 1$  et  $X$  une amplitude réelle positive.

Signal d'entrée complexe associé :  $\underline{x}_n = X_m e^{j2\pi \nu n T_e}$ , avec  $j^2 = -1$ .

- Réponse  $y_n = \Re(\underline{y}_n)$  du filtre numérique à ce signal :

$$\underline{y}_n = \underline{x}_n \left( \sum_{m \geq 0} h_m e^{-j2\pi \nu m T_e} \right) \quad ; \quad \underline{T}(\nu) = \sum_{m \geq 0} h_m e^{-j2\pi \nu m T_e}$$

$\underline{T}(\nu)$  : transmittance du filtre (rôle analogue à la fonction de transfert).

- Signal de sortie réel à l'instant  $t_n = n T_e$  :

$$y_n = |\underline{T}(\nu)| X \cos(2\pi \nu n T_e + \arg \underline{T}(\nu))$$

Résultat de l'échantillonnage aux instants  $t_n$  de la tension sinusoïdale de même fréquence  $\nu$  que la tension d'entrée :  $y(t) = |\underline{T}(\nu)| X \cos(2\pi \nu t + \arg \underline{T}(\nu))$ .

## ② Détermination des $\{h_m\}$

Valeur approchée du coefficient  $h_m$  pour  $m = 0, \dots, N - 1$ , conservée pour caractériser le filtre  $\underline{T}(\nu)$  :

$$h_m = \frac{1}{2L} \sum_{k=-L}^L \underline{T}(k \frac{f_e}{2L}) e^{j\pi m \frac{k}{L}}$$

## 2.7 Introduction à la transmission des signaux

### ② PSI Les trois types de modulation

- Forme générique du signal modulé ou transmis

$$S_t(t) = A(t) \cos(\varphi(t))$$

où  $A(t)$  est l'amplitude instantanée du signal et  $\varphi(t)$  sa phase instantanée. Son spectre est situé en hautes fréquences.

- $s(t)$  : signal modulant (signal à transmettre) de spectre situé en basses fréquences.

$S_t(t)$  signal modulé en amplitude :

$$S_t(t) = (A_0 + k s(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$S_t(t)$  signal modulé en phase :

$$S_t(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + k s(t)).$$

$S_t(t)$  signal modulé en fréquence :

$$S_t(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + k \int_0^t s(t') dt'\right).$$

## 2 PSI Modulation et démodulation d'amplitude

- Spectre du signal modulé

La modulation d'amplitude est une simple transposition du spectre du signal modulant autour de la fréquence porteuse (de haute fréquence). Les poids relatif des composantes du spectre du signal à transmettre ne sont pas modifiés par ce procédé.

- Cas où le signal modulant est sinusoïdal pur

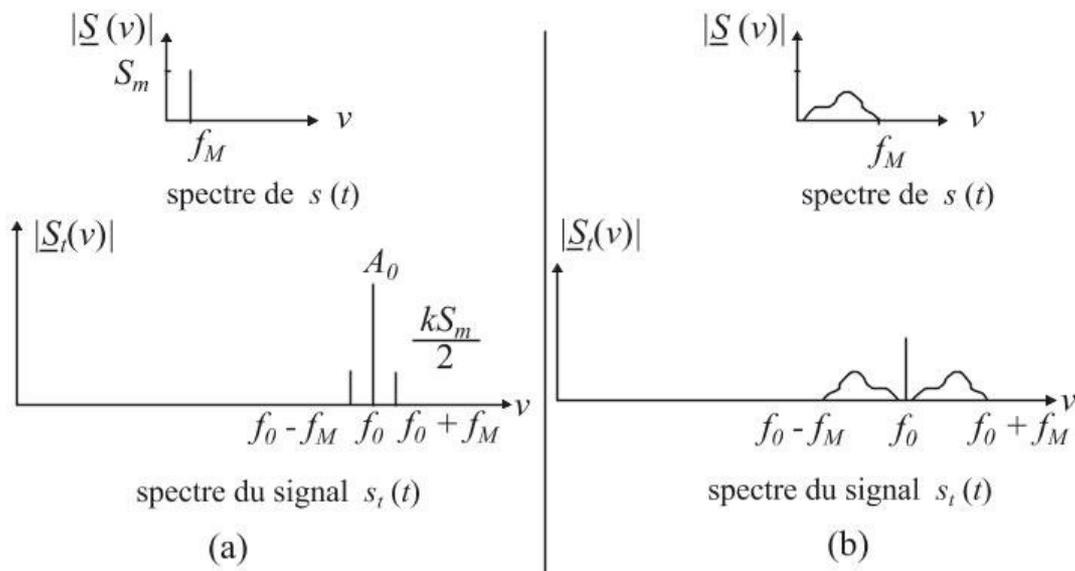
Le signal modulé est :

$$S_t(t) = (A_0 + kS_m \cos(\omega t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$\omega$  : pulsation du signal sinusoïdal à transmettre ;

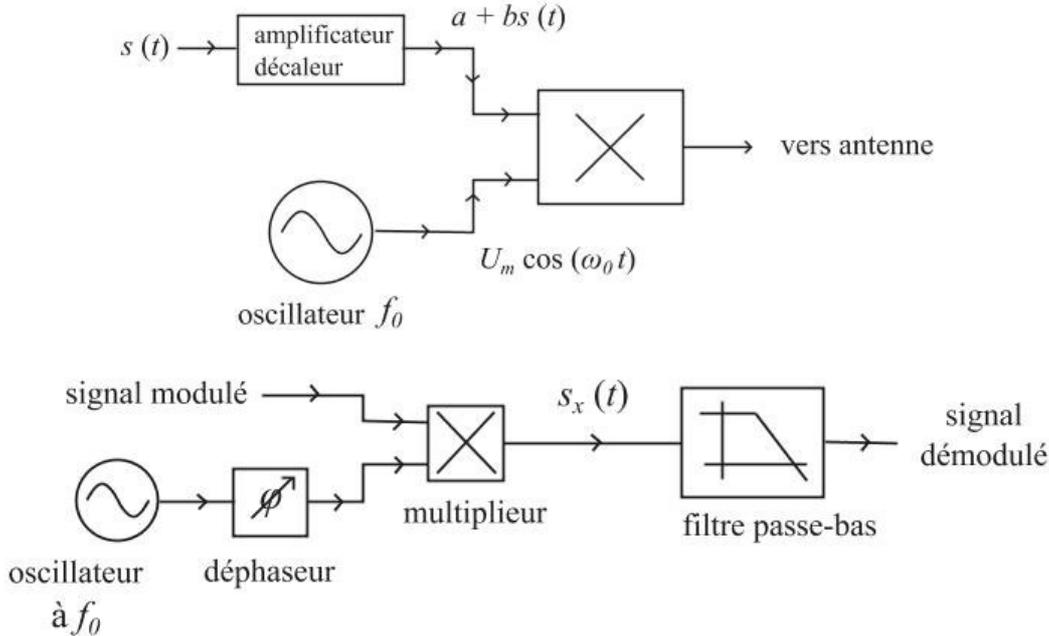
$\omega_0$  : pulsation de la porteuse ;  $\omega_0 \gg \omega$ .

- Lorsque le signal possède un spectre continu, la modulation d'amplitude opère le décalage précédent pour chacune des composantes spectrales de  $s(t)$ .



Spectres de signaux modulés en amplitude : (a) signal sinusoïdal pur ; (b) signal de spectre borné par  $f_M$ .

- Structure d'un modulateur (a) et d'un démodulateur (b) d'amplitude.



### 3. Optique

#### 3.1 Optique géométrique

**1 Indice optique ou indice de réfraction**

$$n = \frac{c}{v}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

$n$  : indice optique ou indice de réfraction (sans dimension)  
 $c$  : célérité dans le vide ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )  
 $v$  : vitesse dans un milieu matériel ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )  
 $\lambda$  et  $\lambda_0$  : longueurs d'onde dans un milieu matériel et dans le vide (m)

**1 Lois de Descartes pour la réflexion**

- Première loi : le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence (défini par le rayon incident et la normale au miroir).
- Deuxième loi : le rayon réfléchi est tel que :  $i' = i$  (l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence) sans orientation d'angle, et  $i' = -i$  avec orientation des angles (par rapport à la normale).

### ① Lois de Descartes pour la réfraction

- Première loi : le rayon réfracté appartient au plan d'incidence (défini par le rayon incident et la normale au dioptre).
- Deuxième loi : l'angle de réfraction  $i_2$  est lié à l'angle d'incidence  $i_1$  par la relation :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

### ① Condition de réflexion totale

$$i_1 > \theta = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

( $i_2$  est maximal)

$i_1$  : angle d'incidence (rad ou °)  
 $n_1$  et  $n_2$  : indices optiques ou indices de réfraction des milieux incident et réfractant (sans dimension)

### ① Lentilles minces – Définitions

- Lentille mince : lentille dont l'épaisseur est négligeable par rapport aux rayons de courbure des deux dioptries et à la distance entre les centres des deux dioptries. Les sommets sont alors confondus en un point : le centre optique O.
- Foyer principal objet F : point objet de l'axe optique dont l'image se trouve à l'infini sur l'axe.
- Foyer principal image F' : image du point objet situé à l'infini sur l'axe optique.
- Distances focales : objet :  $f = \overline{OF}$  ; image :  $f' = \overline{OF'}$  (m).
- Vergence :  $V = \frac{1}{f'}$  (en dioptries  $\delta$ )

### ① Relation de conjugaison et grandissement de Descartes

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

**①****Relation de conjugaison  
et grandissement de Newton**

$$-f'^2 = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'}$$

$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{-f'}$$

**①****Pouvoir de résolution de l'œil**

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{AB}{D}$$

$\alpha$  : pouvoir de résolution angulaire (rad)

$AB$  : distance entre les deux points à séparer (m)

$D$  : distance de l'objet à l'œil (m)

**3.2 Modèle scalaire des ondes lumineuses****② MP****Le milieu de propagation**

- Milieu transparent, linéaire, homogène et isotrope (milieu t.l.h.i.) : milieu dans lequel :
  - les ondes électromagnétiques peuvent se propager sans être atténuées (transparent) ;
  - les propriétés sont indépendantes du point (caractère homogène) et de la direction de propagation envisagée à partir de ce point (caractère isotrope) ;
  - le théorème de superposition est valide (caractère linéaire).
- Un milieu est caractérisé pour les optiques géométrique et ondulatoire par son indice optique  $n \geq 1$ . La propagation de la lumière y est rectiligne.
- Un milieu de propagation transparent, linéaire, isotrope mais inhomogène est caractérisé par un indice optique  $n(M)$ , fonction des coordonnées du point  $M$ . La propagation de la lumière cesse en général d'y être rectiligne.

**② MP****Modèles de propagation**

- Onde plane scalaire monochromatique :

vibration caractérisée par une grandeur physique scalaire  $a$ , sinusoïdale de fréquence  $\nu$  (pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ ), d'amplitude  $A_m$ , se propageant dans une direction  $\vec{u}$ , vecteur unitaire.

$$a(t) = A_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

$$\underline{a}(t) = A_m e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)} = A_m e^{j\varphi(\vec{r}, t)}$$

$\vec{k} = k\vec{u}$  : vecteur d'onde

$$k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}$$

$c, v$  : célérité de la lumière dans le vide et dans le milieu d'indice  $n$

$\varphi_0$  : phase de l'onde à l'origine du repère, à l'instant  $t = 0$

$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$  : phase instantanée de l'onde en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$

$\underline{a}(t)$  : grandeur complexe associée à  $a(t)$ ;  $a(t) = \Re(\underline{a}(t))$

- Plan équiphasé (en optique, plan d'onde) : plan affine perpendiculaire à  $\vec{u}$ , lieu des points en lesquels  $\varphi(\vec{r}, t)$  a une même valeur à un instant  $t$ .

## 2 MP

## Onde sphérique scalaire

- Onde sphérique scalaire monochromatique

vibration se propageant de manière isotrope autour de sa source ou convergeant de manière isotrope de toutes les directions de l'espace vers un point donné.

$$a(t) = A_m \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi_0)}{r}$$

$$\text{ou } A_m \frac{\cos(\omega t + kr + \varphi_0)}{r}$$

$$\underline{a}(t) = A_m \frac{e^{j(\omega t \mp kr + \varphi_0)}}{r} = A_m \frac{e^{j\varphi(\vec{r}, t)}}{r}$$

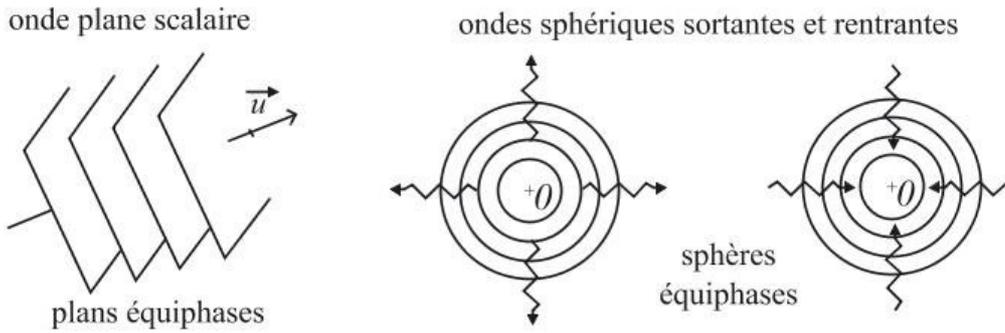
$\|\vec{r}\| = r$  : distance du point  $\vec{r}$  au centre de l'onde

Onde émise par  $O$  (onde sortante) : signe  $-$  devant  $kr$

Onde convergeant en  $O$  (onde entrante) : signe  $+$  devant  $kr$  avec  $k = n \frac{\omega}{c}$ ,  $n$  indice optique du milieu t.l.i.h.

$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t \mp kr + \varphi_0$  : phase instantanée de l'onde sphérique

- Surfaces équiphasées ou surfaces d'onde d'une onde sphérique : lieu des points ayant une même phase instantanée à un instant  $t$  donné, à savoir, les sphères centrées sur  $O$ , que l'onde soit entrante ou sortante.

**② MP****Effet des lentilles sur les ondes**

	Onde incidente	Onde émergente
lentille convergente	O.P.	O.S. convergeant vers un point du plan focal image
lentille convergente	O.S. émergeant d'un point du plan focal objet	O.P.
lentille divergente	O.P.	O.S. émergeant d'un point du plan focal image
lentille divergente	O.S. convergeant vers un point du plan focal objet	O.P.

O.P. : onde plane ; O.S. : onde sphérique.

Hors des cas particuliers précédents, une onde sphérique émise par un point quelconque objet est transformée en une autre onde sphérique convergeant vers le point image qui lui est conjugué par la lentille.

**② MP****Théorème de Malus**

Dans les milieux transparents et isotropes, les rayons lumineux sont normaux aux surfaces équi-phases ou surfaces d'onde.

**3.3 Déphasage et chemin optique****②****MP Déphasage entre points et entre surfaces d'onde**

- Cas général

$$\varphi_{M_2/M_1} = \varphi(\vec{r}_2, t) - \varphi(\vec{r}_1, t)$$

$\varphi_{M_2/M_1}$  : déphasage du point  $M_2$  par rapport au point  $M_1$  à l'instant  $t$  ;

$M_1, M_2$  : points d'un milieu transparent homogène et isotrope (t.h.i.) caractérisés à un instant  $t$  par les phases instantanées d'une onde scalaire sinusoïdale

de fréquence  $\nu$ ,  $\varphi(\vec{r}_1, t)$  et  $\varphi(\vec{r}_2, t)$  où  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ .

- Onde scalaire plane

$$\varphi_{M_2/M_1} = -k\vec{u} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -n \frac{\omega}{c} \vec{u} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

- Onde scalaire sphérique divergeant à partir de  $O$

$$\varphi_{M_2/M_1} = -k(r_2 - r_1) = -n \frac{\omega}{c} (r_2 - r_1)$$

$$r_1 = \|\vec{r}_1\|, r_2 = \|\vec{r}_2\|.$$

- Onde scalaire sphérique convergeant au point  $O$

$$\varphi_{M_2/M_1} = k(r_2 - r_1) = n \frac{\omega}{c} (r_2 - r_1) \quad ; \quad \varphi_{S_2/S_1} = \varphi_{M_2/M_1} = \varphi_{P_2/P_1}$$

$\varphi_{S_2/S_1}$  : déphasage de la surface d'onde  $S_2$  par rapport à la surface d'onde  $S_1$  ;  
 $M_2, P_2$  : points quelconques de  $S_2$  ;  $M_1, P_1$  : points quelconques de  $S_1$ .

## ② MP

## Chemin optique

$$L_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} n(M) ds(M)$$

$L_{M_1M_2}$  : chemin optique du point  $M_1$  au point  $M_2$  d'un même rayon lumineux

$n(M)$  : indice optique du milieu transparent, isotrope éventuellement inhomogène (t.i.i.) de propagation

- $L_{M_1M_2} = -L_{M_2M_1}$ .
- Les chemins optiques sont nuls entre deux points quelconques d'une même surface d'onde.
- $L_{AB} = L_{AC} + L_{CB}$ .
- les chemins optiques entre deux points quelconques appartenant chacun à une surface d'onde sont tous identiques.
- Le chemin optique est le même le long de tous les rayons lumineux entre deux points conjugués l'un de l'autre par un système optique.

$$\varphi_{M_2/M_1} = -2\pi \frac{L_{M_1M_2}}{\lambda_0}$$

$\varphi_{M_2/M_1}$  : déphasage entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  d'un milieu au moins transparent et isotrope dans lequel se propage une onde lumineuse de fréquence  $\nu$  ;

$L_{M_1M_2}$  : chemin optique de  $M_1$  à  $M_2$  ;

$\lambda_0$  : longueur d'onde dans le vide à une onde sinusoïdale de fréquence  $\nu$ .

### 3.4 Les sources lumineuses

② MP

#### Monochromatisme

$$a(t) = A_m(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi(P))$$

$a(t)$  : amplitude instantanée de la vibration lumineuse sinusoïdale de fréquence  $\nu_0$   
 $A_m(P)$ ,  $\varphi(P)$  : amplitude et phase de l'onde au point  $P$ .

② MP

#### Quasi monochromatisme

- Les processus d'émission des sources lumineuses ont une durée finie dans le temps. Il en résulte que le signal résultant de la superposition des ondes émises n'est pas rigoureusement sinusoïdal de fréquence  $\nu_0$ , mais occupe un intervalle de fréquence  $\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau}$

où  $\tau$  est la durée de cohérence caractéristique du processus d'émission.

- Train d'ondes : vibration lumineuse d'amplitude instantanée modélisée par  $a(t) = A_m(P) \sin(2\pi\nu_0 t)$  pour  $t \in [0; \tau]$ .

- Une lumière réelle, même d'une seule « couleur », est la superposition d'une infinité de sinusoïdes autour de la fréquence moyenne  $\nu_0$ . On parle alors de lumière quasi monochromatique.

- Réciproquement, tout élargissement de raie  $\Delta\nu$  constaté par un spectroscope autour d'une valeur moyenne  $\nu_0$  peut s'interpréter comme résultant d'un processus d'émission d'un train d'ondes de durée limitée  $\tau \sim 1/\Delta\nu$  et de fréquence moyenne  $\nu_0$ , même si d'autres phénomènes créent en réalité cet élargissement.

② MP

#### Durée et longueur de cohérence temporelle d'un train d'ondes

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{\nu_0} \Delta\nu \sim \frac{\lambda_0^2}{c\tau}$$

$$l = c\tau \sim \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

$\Delta\lambda$  : élargissement de la raie spectrale autour de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  correspondant à la fréquence  $\nu_0$

$\Delta\nu$  : élargissement en fréquence correspondant

$c$  : célérité de la lumière dans le vide

$\tau$  : durée de cohérence temporelle

$l$  : longueur de cohérence temporelle

## ② MP Principales sources de lumières rencontrées

- Les sources thermiques (lampes à incandescence) : sources à spectres continus, polychromatiques.
- Les lampes spectrales haute ou basse pression : sources à spectres de raies.
- Les tubes fluorescents : sources à spectres mixtes superposant un spectre continu de fluorescence et d'une partie du spectre de raies du mercure.
- Les diodes électroluminescentes (D.E.L. en français et L.E.D. en anglais) : sources quasi monochromatiques.
- Les lasers et les diodes lasers : sources les plus « monochromatiques » qui soient.

### 3.5 Les détecteurs de lumière

## ② MP Flux, éclairement et exitance énergétiques

- Flux énergétique  $\Phi$  : puissance émise, transportée ou reçue sous forme de rayonnement électromagnétique (W).

- Éclairement énergétique  $E$  en un point  $P$ ,  $E = \frac{d^2\Phi}{d^2S}$  :  $d^2\Phi$  flux énergétique reçu par l'élément de surface  $d^2S$  autour de  $P$  ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ).

- Exitance énergétique en un point  $P$ ,  $E = \frac{d^2\Phi}{d^2S}$  :  $d^2\Phi$  flux énergétique émis par l'élément de surface  $d^2S$  autour de  $P$  ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ).

## ② MP

## Éclairement énergétique perçu

$$\langle E \rangle(P) = k|\underline{a}(P, t)|^2$$

$\langle E \rangle(P)$  : éclairement énergétique moyen au point  $P$

$\underline{a}(P, t)$  : amplitude instantanée de la vibration lumineuse sinusoïdale au point  $P$  à l'instant  $t$

$k$  : facteur de proportionnalité entre l'éclairement énergétique moyen et le module de l'amplitude

## ② MP

## Caractéristiques des détecteurs

- Sensibilité globale  $R$  : rapport du signal électrique généré par le capteur (un courant ou une tension électriques) au flux énergétique lumineux reçu. Unités :  $A.W^{-1}$  ou  $V.W^{-1}$ .
- Temps de réponse : temps caractéristique mis par le capteur pour attester d'une variation brusque du signal lumineux. Unité : s.
- Réponse ou sensibilité spectrale  $R(\lambda)$  : caractéristique similaire à la sensibilité globale mais pour une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . unité : celle de  $R$ .
- Linéarité : exprime la proportionnalité du signal électrique généré par le capteur au flux énergétique reçu.
- Rendement quantique  $\eta$  : pour les détecteurs photoniques, nombre moyen d'électrons excités par photon de longueur d'onde  $\lambda$  reçu.

## ② MP

## Principes de détection

- Détection thermique : absorption du rayonnement, traduite par une élévation de température, transformée en un signal électrique. EXEMPLE : thermopile, détecteurs pyroélectriques.
- Détection photonique : absorption d'un photon par un électron. Si l'électron est éjecté du matériau, on a un effet photoélectrique externe ; s'il y reste, un effet photoélectrique interne. EXEMPLE : photodiode et photorésistance (à effet photoélectrique interne), photomultiplicateur (à effet photoélectrique externe).

### 3.6 Superpositions d'ondes lumineuses

#### ② MP Superposition de deux ondes cohérentes

• Interférence : superposition de deux vibrations lumineuses monochromatiques de fréquence  $\nu_0$ , cohérentes entre elles,  $a_1$  et  $a_2$  telles que

$$a_1(P, t) = A_1(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_1(P)) \text{ et } a_2(P, t) = A_2(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_2(P)).$$

• Champ d'interférences : domaine de superposition des deux ondes.

• Formule de Fresnel

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi(P))$$

$I_1, I_2, I(P)$  : éclairagements moyens en  $P$  des vibrations lumineuses d'amplitudes  $a_1, a_2$  et  $a_1 + a_2$   
 $\Phi(P)$  : déphasage  $\varphi_2(P) - \varphi_1(P)$

$\varphi_i(P) = -2\pi \frac{L_i(P)}{\lambda_0}$ ,  $i = 1, 2$  est la phase au point  $P$  de chaque onde liée au chemin optique  $L_i(P)$  entre un point de référence pour chacune des ondes et le point  $P$ .

$L_1(P) - L_2(P)$  est la différence de marche entre les rayons qui atteignent  $P$ .

• Facteur de contraste ou de visibilité

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$I_{max}, I_{min}$  : éclairagements moyens maximal et minimal autour du point  $P$

#### ② MP Superposition de deux ondes incohérentes

Deux ondes scalaires sinusoïdales sont incohérentes si la différence de leurs phases instantanées en un point  $P$  est une fonction du temps.

$$I(P) = I_1 + I_2$$

$I_1, I_2, I(P)$  : éclairagements moyens en  $P$  des vibrations lumineuses d'amplitudes  $a_1, a_2$  et  $a_1 + a_2$ .

#### ② MP Superposition de $N$ ondes cohérentes

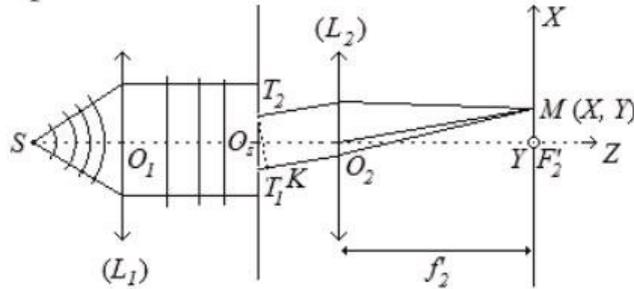
Interférence de  $N$  vibrations lumineuses monochromatiques, d'amplitudes respectives  $a_k(P, t) = A_0(P) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0(P) + k\Phi)$  pour  $k = 0, \dots, N - 1$ .

$$\langle E \rangle(P) = kA_0^2(P) \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\Phi} \right|^2 = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{N\Phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)} \right)^2$$

$\langle E \rangle(P)$  : éclairement moyen au point  $P$  résultant de la superposition des  $N$  ondes.

**2 MP Application aux réseaux de diffraction**

Réseau de diffraction : dispositif constitué de  $N$  fentes fines parallèles entre elles et espacées régulièrement dans un plan, occupant ainsi un rectangle de longueur  $L = Na$ ,  $a$  le pas du réseau.



Le réseau est éclairé par une onde scalaire plane monochromatique de fréquence  $\nu_0$  et de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ , arrivant selon la direction  $\vec{u}_0$ .

$$\Phi = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (a \sin \theta - a \sin \theta_0)$$

$\Phi$  : déphasage entre les vibrations passant par deux fentes consécutives

Formule des réseaux

$$a(\sin \theta - \sin \theta_0) = p \lambda_0 \quad \text{où} \quad p \in \mathbf{Z}$$

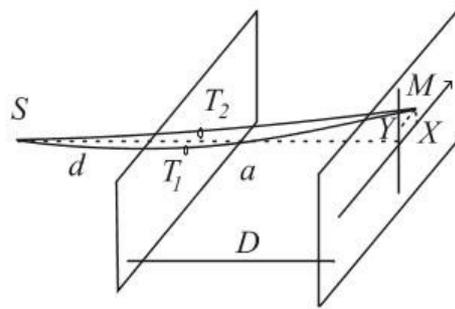
**2 Qualités des réseaux de diffraction**

- Dispersion angulaire du réseau :  $\mathcal{D}_a = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{p}{a \cos \theta}$
- Pouvoir de résolution du réseau :  $P.R = pN$

**3.7 Interférences**

**2 MP Les trous d'Young**

Dispositif : deux trous circulaires  $T_1$  et  $T_2$  distants de  $a$ , percés dans un écran plan opaque, éclairés par une source ponctuelle  $S$  monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ . Les milieux sont t.l.h.i. d'indices optiques respectifs  $n_1$  et  $n_2$ , le plus souvent égaux à 1.



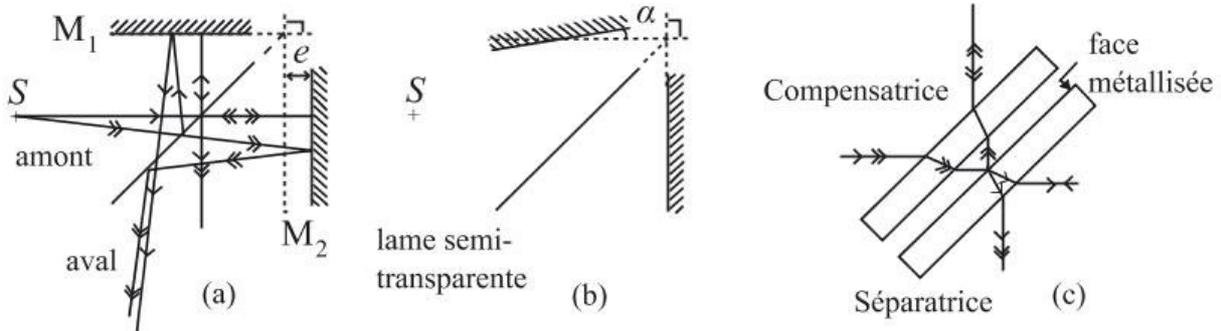
$$I(M) = 2 I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi \delta_{2/1}}{\lambda_0} \right) \right)$$

$$\delta_{2/1} = -n_2 \frac{aX}{D}$$

$$i = \frac{D\lambda_0}{n_2 a}$$

$I(M)$  : éclaircements moyens en  $M$   
 $\delta_{2/1}$  : différence de marche entre les deux rayons lumineux  
 $X$  abscisse du point  $M$   
 $n_2$  : indice du milieu entre le plan des trous et l'écran d'observation  
 $D$  : distance du plan des trous à l'écran d'observation  
 $i$  : interfrange (en m)

**2 MP Interféromètre de Michelson**



(a) en lame d'air; (b) en coin d'air; (c) détail de la lame semi-transparente séparatrice - compensatrice

**2 MP Franges d'égale inclinaison**

•  $S$  ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  ; Michelson en lame d'air d'épaisseur  $e$  : franges d'interférences annulaires à n'importe quelle distance.

$$\delta_{2/1} \approx 2e \left( 1 - \frac{r^2}{2D^2} \right) \quad ; \quad I(r) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{r^2}{2D^2} \right) \right) \right]$$

$I(r)$  : éclaircissement moyen à la distance  $r$  du centre des anneaux d'interférence ;

$D$  : distance de la source équivalente la plus proche à l'écran de projection.

•  $S$  étendue monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  ; Michelson en lame d'air d'épaisseur  $e$  : franges d'interférences à l'infini. Observée dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ .

$$\delta_{2/1} = 2e \cos \alpha \approx 2e \left( 1 - \frac{r^2}{2f'^2} \right)$$

## ② MP

### Franges d'égale épaisseur

$S$  étendue produisant un faisceau de rayons lumineux parallèles, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  ; Michelson en coin d'air d'angle  $\alpha$  à partir du contact optique : interférences localisées au voisinage du coin d'air.

$$\delta = 2e(x) = 2\alpha x \quad ; \quad I(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda_0} \alpha x \right) \right)$$

$I(x)$  : éclairement moyen au point du miroir  $M_1$  d'abscisse  $x$ , distance à l'arête du dièdre formé par  $M_1$  et le symétrique de  $M_2$  par la séparatrice.

## 4. Mécanique

### 4.1 Cinématique d'un point

#### ①

#### Référentiel d'étude

Référentiel de Copernic : origine = centre de masse du système solaire ; axes dirigés vers trois étoiles supposées fixes.

Référentiel héliocentrique ou de Kepler : origine = centre de masse du Soleil ; axes parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Référentiel géocentrique : origine = centre de masse de la Terre ; axes en translation elliptique par rapport à ceux du référentiel héliocentrique.

Référentiel terrestre : référentiel d'étude des mouvements proches du sol.

## 1 Vecteurs vitesse et accélération

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{OM}$  : vecteur position

$\vec{v}$  : vecteur vitesse

$\vec{a}$  : vecteur accélération

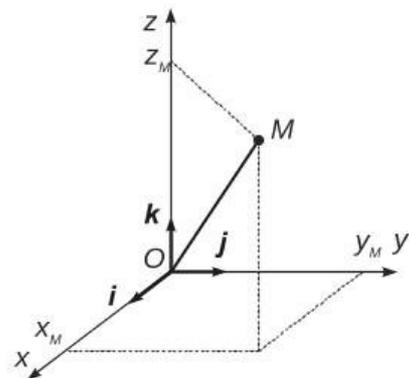
## 1 Coordonnées cartésiennes

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

$x$  : abscisse     $y$  : ordonnée     $z$  : cote



## 1 Coordonnées cylindriques

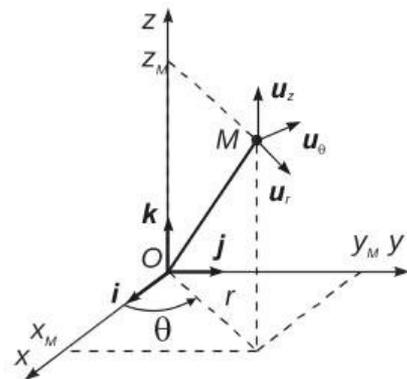
$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$r$  : rayon polaire     $\theta$  : angle polaire  
 $z$  : cote



①

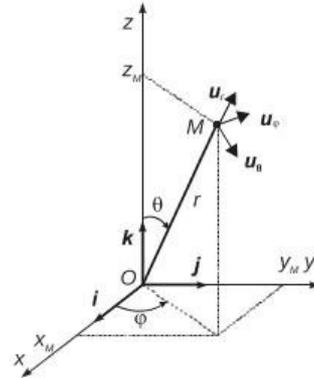
## Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$r$  : rayon

$\theta$  : colatitude variant de  $0$  à  $\pi$

$\varphi$  : longitude variant de  $0$  à  $2\pi$



①

## Déplacement élémentaire

## Coordonnées cartésiennes

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

$x$  : abscisse  $y$  : ordonnée  $z$  : cote

## Coordonnées cylindriques

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

$r$  : rayon polaire  $\theta$  : angle polaire  
 $z$  : cote

## Coordonnées sphériques

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

$r$  : rayon

$\theta$  : colatitude variant de  $0$  à  $\pi$

$\varphi$  : longitude variant de  $0$  à  $2\pi$

①

## Mouvement rectiligne uniformément accéléré

**Accélération** :  $a = a_0 = \text{cte}$

**Vitesse** :  $v = a_0 t + v_0$

**Position** :  $x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$

$a_0$  : accélération initiale ( $\text{m.s}^{-2}$ )

$v_0$  : vitesse initiale ( $\text{m.s}^{-1}$ )

$x_0$  : position initiale (m)

### ① Mouvement circulaire uniforme

**Position :**  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

**Vitesse :**  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r\omega\vec{u}_\theta$

**Accélération :**  $\vec{a} = -r\omega^2\vec{u}_r$

Coordonnées polaires

$r = \text{cte}$  donc  $\dot{r} = 0$  (mouvement circulaire)

$\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$  donc  $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$  (mouvement uniforme)

$r$  : rayon (m)

$\omega$  : vitesse angulaire ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ )

### ① Mouvement circulaire non uniforme

**Position :**  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

**Vitesse :**  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r\omega\vec{u}_\theta$

**Accélération :**  $\vec{a} = r\dot{\omega}\vec{u}_\theta - r\omega^2\vec{u}_r$

Coordonnées polaires

$r = \text{cte}$  donc  $\dot{r} = 0$  (mouvement circulaire)

$r$  : rayon (m)

$\omega$  : vitesse angulaire ( $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ )

## 4.2 Cinématique d'un solide

### ① Translation

Un solide est en translation lorsque le repère associé à chacun de ces points est tel que les vecteurs unitaires restent invariants au cours du temps (en norme, direction et sens).

- Il y a translation rectiligne si la trajectoire est une droite.
- Il y a translation circulaire si la trajectoire décrit un cercle.

### ① Rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation lorsque le repère associé à chacun de ces points est tel que les vecteurs unitaires tournent autour de l'axe de rotation.

Chaque point du solide décrit un arc de cercle de rayon  $r$ , à la vitesse

$$v = r\omega = r \frac{d\theta}{dt} .$$

### 4.3 Dynamique du point - étude énergétique

#### ① Principe des actions réciproques ou troisième loi de Newton

Pour deux points matériels  $A$  et  $B$ , les forces  $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}}$  et  $\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$  sont opposées ( $\overrightarrow{F_{A \rightarrow B}} = -\overrightarrow{F_{B \rightarrow A}}$ ) et portées par la même droite d'action. On parle aussi de principe d'action-réaction.

#### ① Quantité de mouvement

$$\overrightarrow{p} = m \overrightarrow{v}$$

$\overrightarrow{p}$  : quantité de mouvement (norme en kg.s)

$m$  : masse (kg)

$\overrightarrow{v}$  : vitesse (norme en m.s)

#### ① Principe d'inertie ou première loi de Newton et référentiel galiléen

Il existe des référentiels dit galiléens dans lesquels tout système isolé ( $\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$ ) ou pseudo-isolé ( $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$ ) est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, soit  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cté}$ . Si le système est initialement au repos, il le reste.

- Référentiels strictement galiléens : référentiels de Copernic et de Kepler (= héliocentriques).
- Référentiels galiléens approchés : référentiels géocentrique et terrestre.

#### ① Principe fondamental de la dynamique ou deuxième loi de Newton

$$\sum_i \overrightarrow{F_{\text{ext},i}} = m \overrightarrow{a}$$

$\overrightarrow{F_{\text{ext}}}$  : force extérieure (norme en N)

$m$  : masse (kg)

$\overrightarrow{a}$  : accélération (norme en m.s<sup>-2</sup>)

## 1 Loi de la quantité de mouvement

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext},i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\vec{F}_{\text{ext}}$  : force extérieure (norme en N)  
 $m$  : masse (kg)  
 $\vec{p}$  : quantité de mouvement (norme en kg.s)

C'est une réécriture du principe fondamental de la dynamique.

## 1 Poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi} = \rho V_i \vec{g}$$

$\vec{\Pi}$  : poussée d'Archimède (norme en N)  
 $\rho$  : masse volumique du fluide (kg.m<sup>-3</sup>)  
 $V_i$  : volume du corps immergé (m<sup>3</sup>)  
 $\vec{g}$  : accélération de la pesanteur (norme en m.s<sup>-2</sup>)

## 1 Pendule simple

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

(petites oscillations)

avec  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\theta$  : angle de torsion (rad)  
 $t$  : temps (s)  
 $g$  : accélération de la pesanteur (m.s<sup>-2</sup>)  
 $\ell$  : longueur du pendule (m)  
 $\theta_m$  : amplitude de l'angle de torsion (rad)  
 $\omega$  : pulsation propre (rad.s<sup>-1</sup>)  
 $\varphi$  : phase à l'origine (rad)

## 1 Lois de Coulomb pour le glissement

- Première loi : la force de frottement est colinéaire à la vitesse de glissement (constatée ou qui apparaîtrait s'il n'y avait pas de frottement) mais en sens opposé.

• Deuxième loi :

**Glissement :**

$$\|\vec{R}_T\| = f\|\vec{R}_N\|$$

**Adhérence :**

$$\|\vec{R}_T\| < f\|\vec{R}_N\| \quad \text{ou} \quad \tan \theta < f$$

$$\text{car } \tan \theta = \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|}$$

$\vec{R}_T$  : réaction tangentielle ou force de frottement (norme en N)

$\vec{R}_N$  : réaction normale (norme en N)

$f$  : coefficient de frottement solide (sans dimension)

$\theta$  : angle de frottement (rad)

### 1 Puissance et travail d'une force

**Puissance (mécanique) :**

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = f v \cos(\vec{f}, \vec{v})$$

**Travail élémentaire :**

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Travail moteur :  $\delta W > 0$

Travail résistant :  $\delta W < 0$

$\mathcal{P}$  : puissance (W)

$\vec{f}$  : force (norme en N)

$\vec{v}$  : vitesse (norme en m.s<sup>-1</sup>)

$\delta W$  : travail élémentaire (J)

$d\vec{\ell}$  : déplacement élémentaire (m)

### 1 Loi de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = E_{c_F} - E_{c_I} = W$$

$\Delta E_c$  : variation d'énergie cinétique entre l'état initial  $I$  et l'état final  $F$  (J)

$W$  : travail de la résultante des forces extérieure (J)

### 1 Loi de la puissance cinétique

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt}$$

$\mathcal{P}$  : puissance (W)

$E_c$  : énergie cinétique (J)

$t$  : temps (s)

**1 Énergies potentielles**

**élastique :**  $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

**de pesanteur :**  $E_{pp} = mgz$

**gravitationnelle :**  $E_p = -\frac{Gmm'}{r}$

**d'interaction électrostatique :**

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$$

**électrostatique :**  $E_p = qV$

$k$  : constante de raideur ( $\text{N.m}^{-1}$ )  
 $x$  : allongement (m)  
 $m$  et  $m'$  : masse (kg)  
 $g$  : accélération de la pesanteur ( $\text{m.s}^{-2}$ )  
 $z$  : altitude (m)  
 $G$  : constante de gravitation ( $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ )  
 $r$  : distance (m)  
 $\epsilon_0$  : constante diélectrique du vide ( $\text{F.m}^{-1}$ )  
 $q$  et  $q'$  : charge (C)  
 $V$  : potentiel (V)

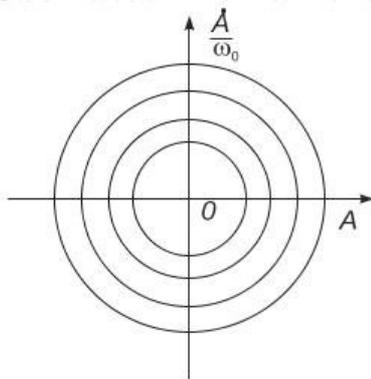
**1 Loi de l'énergie mécanique**

$$\Delta E_m = E_{m_F} - E_{m_I} = W_d$$

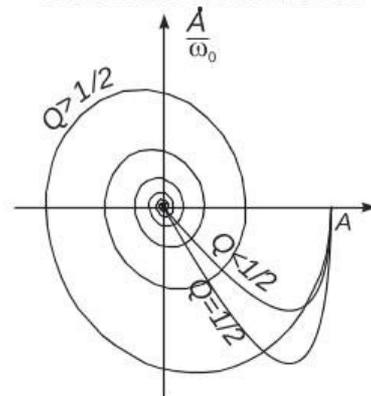
$\Delta E_m$  : variation d'énergie mécanique entre l'état initial  $I$  et l'état final  $F$  (J)  
 $W_d$  : travail de la résultante des forces dissipatives (= non conservatives) (J)

**1 Portrait de phase d'un oscillateur harmonique**

**Oscillateur non amorti**



**Oscillateur amorti**



$A$  : grandeur physique oscillant

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt}$$

①

## Équilibre et stabilité

Condition d'équilibre :

$$f(x_e) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$$

Équilibre stable :

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{es}} > 0$$

Équilibre instable :

$$\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{ei}} < 0$$

 $f$  : force (N) $E_p$  : énergie potentielle (J) $x$  : position (m) $x_e$  : position d'équilibre (m) $x_{es}$  : position d'équilibre stable (m) $x_{ei}$  : position d'équilibre instable (m)

## 4.4 Dynamique de particules chargées

①

## Force de Lorentz – Puissance

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\mathcal{P} = q\vec{E} \wedge \vec{v}$$

 $\vec{F}$  : force de Lorentz (norme en N) $q$  : charge de la particule (C) $\vec{E}$  : champ électrique (norme en  $V.m^{-1}$ ) $\vec{v}$  : vitesse (norme en  $m.s^{-1}$ ) $\vec{B}$  : champ magnétique (norme en T) $\mathcal{P}$  : puissance (W)

①

## Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

$$\text{Accélération : } \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

$$\text{Vitesse : } \vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$$

$$\text{Position : } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0t + \overrightarrow{OM}_0$$

Énergie totale :

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{cte}$$

Vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{2q(V_I - V_F)}{m} + v_0^2}$$

 $\vec{v}_0$  : vitesse initiale (norme en  $m.s^{-1}$ ) $\overrightarrow{OM}_0$  : position initiale (norme en m)

**1 Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme (cas où  $\vec{v}$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$ )**

Mouvement circulaire

$$R = \left| \frac{mv}{qB} \right|$$

$R$  : rayon de courbure de la trajectoire (m)  
 $m$  : masse (kg)  
 $v$  : vitesse (m.s<sup>-1</sup>)  
 $B$  : champ magnétique (T)

**4.5 Dynamique du solide - étude énergétique**

**1 Moment cinétique par rapport à un point**

$$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)$$

$\vec{L}_O(M)$  : moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  (norme en kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)  
 $\vec{OM}$  : vecteur position (norme en m)  
 $\vec{v}(M)$  : vitesse (norme en m.s<sup>-1</sup>)

**1 Moment cinétique par rapport à un axe**

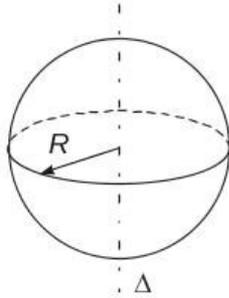
$$L_\Delta(M) = \vec{L}_O(M) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$L_\Delta(M)$  : moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) (kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)  
 $\vec{L}_O(M)$  : moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  (norme en kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>)  
 $\vec{u}_\Delta$  : vecteur unitaire sur l'axe ( $\Delta$ ) (sans dimension)

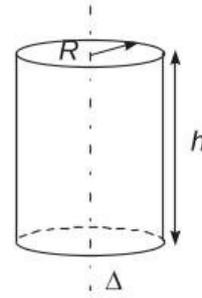
**1 Moment d'inertie**

$$J_\Delta = \iiint_{\text{solide}} r^2 dm$$

$J_\Delta$  : moment d'inertie par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) (kg.m<sup>2</sup>)  
 $r$  : distance à l'axe ( $\Delta$ ) (m)  
 $m$  : masse du solide (kg)

**1****Moments d'inertie classiques****Sphère pleine homogène**

$$J_{\Delta} = \frac{2}{5} m R^2$$

**Cylindre plein homogène**

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} m R^2$$

**1****Moment cinétique d'un solide en rotation**

$$L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$$

$L_{\Delta}$  : moment cinétique par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) ( $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ )

$J_{\Delta}$  : moment d'inertie par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) ( $\text{kg.m}^2$ )

$\omega$  : vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

**1****Énergie cinétique d'un solide en rotation**

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2 = \frac{1}{2} L_{\Delta} \omega$$

$E_c$  : énergie cinétique (J)

$J_{\Delta}$  : moment d'inertie par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) ( $\text{kg.m}^2$ )

$\omega$  : vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

$L_{\Delta}$  : moment cinétique par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) ( $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ )

**1****Loi de l'énergie cinétique pour un solide**

$$\Delta E_c = E_{c_F} - E_{c_I} = W$$

$\Delta E_c$  : variation d'énergie cinétique entre l'état initial  $I$  et l'état final  $F$  (J)

$W$  : travail de la résultante des forces extérieures (J)

**1 Moment d'une force par rapport à un point**

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  : moment de la force  $\vec{F}$  en  $M$  par rapport à  $O$  (norme en N.m)  
 $\vec{OM}$  : vecteur position (norme en m)  
 $\vec{F}$  : force (norme en N)

**1 Moment d'une force par rapport à un axe**

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$  : moment de la force  $\vec{F}$  en  $M$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$  (N.m)  
 $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  : moment de la force  $\vec{F}$  en  $M$  par rapport à  $O$  (norme en N.m)  
 $\vec{u}_\Delta$  : vecteur unitaire sur l'axe  $(\Delta)$  (sans dimension)

**1 Lois du moment cinétique**

**En un point fixe**

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

**Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe**

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$$

**1 Couple et liaison pivot**

- Couple : système d'actions mécaniques dont la résultante des forces est nulle tandis que la résultante des moments par rapport à un point fixe est non nulle.
- Liaison pivot : liaison autour de laquelle un solide ne peut que réaliser une rotation.

①

## Pendule pesant

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{J_\Delta} \sin\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

(petites oscillations)

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{mgL}{J_\Delta}}$$

 $\theta$  : angle de torsion (rad) $t$  : temps (s) $m$  : masse (kg) $g$  : accélération de la pesanteur (m.s<sup>-2</sup>) $L$  : longueur du pendule (m) $J_\Delta$  : moment d'inertie par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) (kg.m<sup>2</sup>) $\theta_m$  : amplitude de l'angle de torsion (rad) $\omega$  : pulsation propre (rad.s<sup>-1</sup>) $\varphi$  : phase à l'origine (rad)

## 4.6 Mouvement dans un champ de force centrale conservative

①

## Force centrale conservative

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$$

$$\text{avec } \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{et } r = OM$$

$$E_p(r) = - \int_0^r F(r) dr + \text{cte}$$

 $\vec{F}$  : force centrale conservative (norme en N) $\vec{u}_r$  : vecteur unitaire radial (sans dimension) $r$  : distance (m) $E_p$  : énergie potentielle (J)

①

## Interactions gravitationnelle et électrostatique

## Interaction gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -G \frac{m m'}{r^2} \vec{u}_r$$

 $G$  : constante de gravitation (m<sup>3</sup>.kg<sup>-1</sup>.s<sup>-2</sup>) $m$  et  $m'$  : masse (kg) $r$  : distance (m)

## Interaction électrostatique

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2} \vec{u}_r$$

 $\epsilon_0$  : constante diélectrique du vide (F.m<sup>-1</sup>) $q$  et  $q'$  : charge (C) $r$  : distance (m)

### ① Loi de conservation du moment cinétique en un point fixe

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{L}_O(M) = \text{cte}$$

$\overrightarrow{L}_O(M)$  : moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  (norme en  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ )

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F})$  : moment de la force  $\overrightarrow{F}$  en  $M$  par rapport à  $O$  (norme en  $\text{N.m}$ )

Le moment cinétique est fixe et à chaque instant orthogonal à  $\overrightarrow{OM}$  donc le mouvement est plan.

### ① Loi des aires

$$r^2\dot{\theta} = \text{cte} = C$$

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

$r$  : distance (m)

$\dot{\theta} = \omega$  : vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

$C$  : constante des aires ( $\text{m}^2.\text{rad.s}^{-1}$ )

$\mathcal{A}$  : aire ( $\text{m}^2$ )

$t$  : temps (s)

### ① Énergie potentielle effective

$$E_{p_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

$E_{p_{\text{eff}}}(r)$  : énergie potentielle effective (J)

$m$  : masse (kg)

$C$  : constante des aires ( $\text{m}^2.\text{rad.s}^{-1}$ )

$r$  : distance (m)

$\mathcal{A}$  : aire ( $\text{m}^2$ )

$E_p(r)$  : énergie potentielle d'interaction (J)

### ① État lié – état de diffusion

- État lié : état pour lequel le mouvement est borné ( $r$  est compris entre une valeur minimum et une valeur maximum).
- État de diffusion : état pour lequel le mouvement est non borné.

**① Conservation de l'énergie mécanique**

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \text{cte}$$

$$E_m = E_{cr} + E_{p\text{eff}}(r) = \text{cte}$$

$$E_{cr} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$E_m$  : énergie mécanique (J)  
 $E_{p\text{eff}}$  : énergie potentielle effective (J)  
 $E_p(r)$  : énergie potentielle d'interaction (J)  
 $E_{cr}$  : énergie cinétique radiale (J)

**① Énergie mécanique****Mouvement circulaire**

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2r} = \frac{E_p(r)}{2}$$

$r$  : rayon de la trajectoire

**Mouvement elliptique**

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2p}(1 - e^2) = -\frac{Gmm'}{2a}$$

$p$  : paramètre de l'ellipse (m)

$e$  : excentricité (sans dimension)

$a$  : demi grand axe (m)

**① Mouvement circulaire – période**

$$T = 2\pi \sqrt{-\frac{mr^3}{K}}$$

avec  $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r$

$T$  : période (s)

$m$  : masse (kg)

$r$  : rayon (m)

$K$  : coefficient de proportionnalité (N.m<sup>2</sup>)

**① Mouvement des planètes – Lois de Kepler**

• Première loi : les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

• Deuxième loi : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

• Troisième loi : le carré de la période de révolution est proportionnel au cube

du demi grand axe de l'orbite :  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S}$  .

**1 Satellite géostationnaire**

$$z = \sqrt[3]{\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

$z$  : altitude (m)  
 $G$  : constante de gravitation ( $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ )  
 $m_T$  : masse de la Terre (kg)  
 $T$  : période (s)  
 $R_T$  : rayon de la Terre (m)

**1 Vitesses cosmiques**

**Première vitesse cosmique  
 ou vitesse en orbite basse  
 ou vitesse de satellisation**

$$v_{c1} = v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{Gm_T}{R_T}}$$

**Deuxième vitesse cosmique  
 ou vitesse de libération**

$$v_{c2} = v_{\ell} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}$$

**4.7 Référentiels non galiléens - cinématique**

**2 MP Formule de dérivation composée**

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{U}$$

$\vec{U}$  vecteur d'un espace de dimension 3 ;  
 $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$  vecteur rotation du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_i(t) \vec{u}_i$$

$\{\vec{u}_i\}_{i=1,2}$  ou 3 famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .  
 $\dot{\alpha}_i$  est la vitesse angulaire de rotation autour de  $\vec{u}_i$ , à l'instant  $t$ .

Propriétés des vecteurs rotation

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = -\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}(t) \quad ; \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}}(t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t).$$

**2 MP****Composition des vitesses**

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$ ,  $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$  : vitesses de  $M$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ;  
 $O'$  : origine du référentiel  $\mathcal{R}'$  ;  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(O')$  : vitesse de  $O'$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ;  
 $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t)$  vecteur rotation du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  ;  
 $\overrightarrow{O'M}$  : vecteur position de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$ .

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(M^*) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{v}_e(M)$  : vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  ;  
 $M^*$  : point coïncident du point  $M$ .

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_e(M) + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$

$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$  : vitesse « absolue » du point  $M$  ;  
 $\vec{v}_e(M)$  : vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  ;  
 $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$  : vitesse « relative » du point  $M$ .

**2 MP****Exemples de vitesses**

•  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport  $\mathcal{R}$  :  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \vec{0}$  ;  $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O')$  ;

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$

•  $\mathcal{R}'$  en rotation autour d'un axe fixe dans  $\mathcal{R}$  :  $O' = O$  ;  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \Omega(t) \vec{e}_z$  ;  
 $\vec{v}_e(M) = \Omega(t) \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{O'M}$  ;

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

**2 MP****Composition des accélérations**

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$$

$$+ \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \overrightarrow{O'M} + 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M)$ ,  $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$  : accélérations de  $M$  dans les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ;  
 $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$  : vitesse de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\vec{a}_e(M)$  : accélération d'entraînement de  $M$  (différente de la dérivée dans  $\mathcal{R}$  de sa vitesse d'entraînement).

$$\vec{a}_c(M) = 2 \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)$$

$\vec{a}_c(M)$  : accélération de Coriolis (ou complémentaire) de  $M$ .

$$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(M)$  : accélération « absolue » du point  $M$  ;

$\vec{a}_{\mathcal{R}'}(M)$  : accélération « relative » du point  $M$  ;

$\vec{a}_e(M)$  : accélération d'entraînement de  $M$  ;

$\vec{a}_c(M)$  : accélération de Coriolis de  $M$ .

## ② MP Exemples d'accélération

•  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{a}_c(M) = \vec{0} \quad ; \quad \vec{a}_e(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O')$$

•  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme par rapport à un axe fixe de  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(t) = \Omega \vec{e}_z \text{ avec } \Omega = cste$$

$\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left( \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ , où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation.

## 4.8 Référentiels non galiléens - dynamique

### ② MP Loi de la dynamique en référentiel non galiléen

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}'}(M) = \sum \vec{f} - m \vec{a}_e(M) - m \vec{a}_c(M)$$

$\mathcal{R}'$  : référentiel non galiléen ;  $\mathcal{R}$  : référentiel galiléen ;

$\sum \vec{f}$  : résultante des forces (ext.) appliquées sur le point  $M$  de masse  $m$  ;

Équilibre en référentiel non galiléen :  $\vec{v}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$  et  $\vec{a}_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$  :

$$\vec{0} = \sum \vec{f} - m \vec{a}_e(M)$$

## ② MP

## Les forces d'inertie

- Force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M)$$

$\vec{f}_{ie}$  : force d'inertie d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  ;

$m$  : masse du point matériel ;

$\vec{a}_e(M)$  : accélération d'entraînement du point matériel.

– Elle existe toujours car  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(O')$  n'est pas constante ou/et  $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$ .

– Si  $\mathcal{R}'$  en translation non uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$  :

$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$  et  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}}(O')$  alors  $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_{\mathcal{R}}(O')$ .

– Si  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme par rapport à un axe fixe de  $\mathcal{R}$  :  $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \Omega \vec{e}_z$  ;

$\vec{a}_e(M) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$  ;  $\vec{f}_{ie} = m \Omega^2 \overrightarrow{HM}$ ,  $H$  étant le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation.

- Force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c(M)$$

$\vec{f}_{ic}$  : force d'inertie de Coriolis de  $\mathcal{R}'$  dans  $\mathcal{R}$  ;

$m$  : masse du point matériel ;

$\vec{a}_c(M)$  : accélération de Coriolis du point matériel.

Elle s'annule à l'équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ .

## ② MP

## Classe des référentiels galiléens

- Tous les référentiels galiléens sont en translations rectilignes uniformes les uns par rapport aux autres.

- Caractère galiléen des principaux référentiels rencontrés, du plus galiléen au moins galiléen : référentiel de Copernic, référentiel géocentrique, référentiel terrestre.

## ② MP

## Définition de l'accélération de la pesanteur

$$\vec{g}(M) = \vec{\mathcal{G}}(M) + \Omega_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C}^2 \overrightarrow{HM}$$

$M$  : point au voisinage de la surface de la Terre,  $H$  son projeté orthogonal sur l'axe polaire ;

$\vec{G}(M)$  : champ de gravitation de la Terre en  $M$  ;

$\vec{g}(M)$  : accélération de la pesanteur en  $M$  ;

$\Omega_{\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_C} \approx 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$  : vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe des pôles.

### 4.9 Lois de Coulomb du frottement solide

#### ② MP Lois du frottement de glissement

- Pour un corps au repos

$$\tan \alpha \leq f_s \quad \text{où} \quad \tan \alpha = \frac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|}$$

$C$  : corps au repos dans  $\mathcal{R}_S$  lié au support  $S$  ;

$\vec{R}_t, \vec{R}_n$  : composantes tangentielle et normale de la force que  $S$  exerce sur  $C$  ;

$f_s$  : coefficient de frottement statique entre le support et le corps.

Doit s'accompagner pour le corps  $C$  de l'une des deux conditions :

$$\sum \vec{f} = \vec{0}, \text{ si } \mathcal{R}_S \text{ est galiléen} \quad ; \quad \sum \vec{f} - \vec{f}_{ie} = \vec{0}, \text{ s'il ne l'est pas,}$$

$\sum \vec{f}$  : somme des forces extérieures s'exerçant sur le corps  $C$ .

- Pour un corps en mouvement

$$\vec{R}_t \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}_S}(M \text{ ou } G) < 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{R}_t\| = f_d \|\vec{R}_n\|$$

$\vec{R}_t, \vec{R}_n$  : composantes tangentielle et normale de la force que  $S$  exerce sur  $C$  ;

$\vec{v}_{\mathcal{R}_S}(M \text{ ou } G)$  : vitesse instantanée de translation du corps dans  $\mathcal{R}_S$  ;

$f_d$  : coefficient de frottement dynamique entre le support et le corps,  $0 < f_d < f_s$ .

#### ② MP Bilan énergétique

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = \mathcal{P}(\vec{R}_t) = \vec{R}_t \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}}(M \text{ ou } G)$$

$\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_p, \vec{v}_{\mathcal{R}}(M \text{ ou } G)$  : énergies cinétique et potentielle et vitesse dans  $\mathcal{R}$  galiléen du point  $M$  ou du corps  $C$  ;

$\vec{R}_t$  : composante tangentielle de la réaction du support sur  $C$ .

## 5. Mécanique des fluides

### 5.1 Fluides en écoulement

#### ② PSI Débit-volume et débit-masse

- Densité de flux de masse

$$\vec{j}_m(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$\vec{j}_m(\vec{r}, t)$  : densité de flux de masse au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ );

$\mu(\vec{r}, t)$  : masse volumique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\vec{v}(\vec{r}, t)$  : vitesse du fluide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

- Débit-volume et débit-masse

$$\dot{V}(t) = \iint_{S \text{ ou } \Sigma} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

$\dot{V}(t)$  : débit-volume à l'instant  $t$ ; (en  $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ );

$\vec{v}(\vec{r}, t)$  : vitesse du fluide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$d\vec{S}$  : élément de surface; (en  $\text{m}^2$ );

$S, \Sigma$  : surfaces ouverte, fermée.

$$\dot{m}(t) = \iint_{S \text{ ou } \Sigma} \vec{j}_m(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$$

$\dot{m}(t)$  : débit-masse à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.s}^{-1}$ );

$\vec{j}_m(\vec{r}, t)$  : densité de flux de masse au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ );

$d\vec{S}$  : élément de surface; (en  $\text{m}^2$ );

$S, \Sigma$  : surfaces ouverte, fermée.

#### ② PSI Conservation de la masse

- À une dimension

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_m}{\partial x}(x, t) = 0$$

$\mu(x, t)$  : masse volumique du fluide en tout point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$j_m(x, t)$  : composante sur  $\vec{e}_x$  de la densité de flux de masse en tout point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ).

- À trois dimensions

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{\mathbf{j}}_m(\vec{r}, t) = 0$$

$\mu(\vec{r}, t)$  : masse volumique du fluide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\vec{\mathbf{j}}_m(\vec{r}, t)$  : densité de flux de masse au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ).

## 5.2 Écoulement incompressible et homogène

### ② PSI Caractérisation des régimes d'écoulement

$$Re = \frac{\mu \bar{v} L}{\eta}$$

$Re$  : nombre de Reynolds; (sans dimension);

$\mu$  : masse volumique caractéristique du fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\bar{v}$  : vitesse caractéristique de l'écoulement;

$L$  : dimension caractéristique de l'écoulement ou de l'obstacle dans l'écoulement (m);

$\eta$  : viscosité (dynamique) du fluide (Pl).

$$\nu = \frac{\eta}{\mu}$$

$\nu$  : viscosité cinématique du fluide ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ );

$\eta$  : viscosité (dynamique) du fluide (Pl);

$\mu$  : masse volumique caractéristique du fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ ).

### ② PSI Loi de Hagen-Poiseuille

- Champ des vitesses

$$\vec{\mathbf{v}}(\vec{r}) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{\mathbf{e}}_z$$

$\vec{\mathbf{v}}(\vec{r})$  : champ des vitesses au point  $\vec{r}$  de la canalisation ( $\text{m.s}^{-1}$ )

$\Delta p$  : différence de pression entre les extrémités de la canalisation (Pa)

$L$  : distance entre les extrémités de la canalisation (m)

$R$  : rayon de la canalisation (m)

$\eta$  : viscosité dynamique du fluide (en Pl)

$r$  : distance du point  $\vec{r}$  à l'axe de la canalisation (m)

$\vec{\mathbf{e}}_z$  : direction de l'axe de la canalisation.

- Débit-volume de la canalisation

$$\dot{V} = \pi R^2 \bar{v} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p$$

$\dot{V}$  : débit-volume à travers la section de la canalisation ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\bar{v}$  : vitesse moyenne du fluide à travers la section de la canalisation ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )

$\Delta p$  : différence de pression entre les extrémités de la canalisation (Pa)

$L$  : distance entre les extrémités de la canalisation (m)

$R$  : rayon de la canalisation (m)

$\eta$  : viscosité dynamique du fluide (Pl).

- Résistance hydraulique

$$R_h = \frac{\Delta p}{\dot{V}} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

$R_h$  : résistance hydraulique de la canalisation (en  $\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^3$ );

$\dot{V}$  : débit-volume à travers la section de la canalisation (en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ );

$\Delta p$  : différence de pression entre les extrémités de la canalisation (en Pa);

$L$  : distance entre les extrémités de la canalisation (en m);

$R$  : rayon de la canalisation (en m)

$\eta$  : viscosité dynamique du fluide (en Pl).

## ② PSI Force de traînée sur une sphère solide

- Formule de Stokes

$$\vec{\mathbf{F}}_T = -6\pi\eta R \vec{\mathbf{v}}$$

$\vec{\mathbf{F}}_T$  : force de traînée sur la sphère aux faibles vitesses (en N);

$\eta$  : viscosité dynamique (en Pl);

$R$  : rayon de la sphère (en m);

$\vec{\mathbf{v}}$  : vitesse de la sphère par rapport au fluide (en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

- Traînée aux fortes vitesses

$$\vec{\mathbf{F}}_T = -\frac{1}{2} C \mu \pi R^2 v \vec{\mathbf{v}}$$

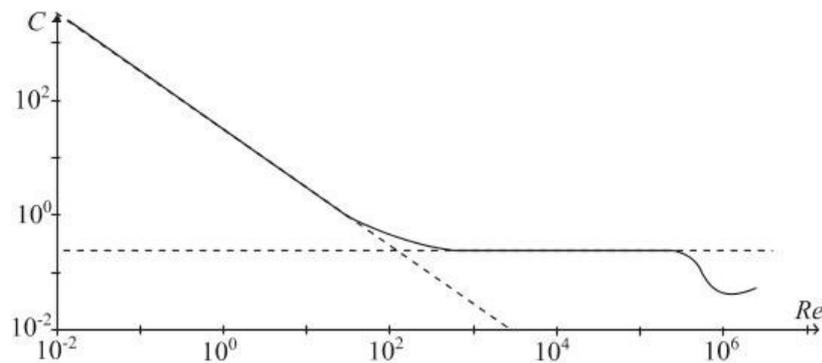
$\vec{\mathbf{F}}_T$  : force de traînée sur la sphère aux fortes vitesses (en N);

$C$  : coefficient de traînée (sans dimension);

$\mu$  : masse volumique du fluide (en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ );

$R$  : rayon de la sphère (en m);

$v = \|\vec{\mathbf{v}}\|$  : norme de la vitesse de la sphère par rapport au fluide (en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).



## ② PSI Force de traînée et portance d'une aile d'avion

- Force de traînée

$$\vec{F}_x = \frac{1}{2} C_x \mu_\infty L^2 U_\infty \vec{U}_\infty$$

$F_x$  : traînée ; (en N) ;

$C_x$  : coefficient de traînée ; (sans dimension) ;

$\mu_\infty$  : masse volumique de l'air loin de l'aile ; (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;

$L$  : dimension caractéristique de l'aile dans le sens de l'écoulement ; (en m) ;

$U_\infty = \|\vec{U}_\infty\|$  : vitesse d'écoulement de l'air loin de l'aile ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;

- Force de portance

$$\vec{F}_z = \frac{1}{2} C_z \rho_\infty U_\infty^2 L^2 \vec{u}_\perp$$

$F_z$  : portance ; (en N) ;

$C_z$  : coefficient de portance ; (sans dimension) ;

$\rho_\infty$  : masse volumique de l'air loin de l'aile ; (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;

$L$  : dimension caractéristique de l'aile dans le sens de l'écoulement ; (en m) ;

$U_\infty$  : vitesse d'écoulement de l'air loin de l'aile ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;

$\vec{u}_\perp$  : vecteur unitaire perpendiculaire à la traînée, dans le plan vertical contenant cette dernière et dirigé vers le haut.

### 5.3 Bilans macroscopiques

## ② PSI La relation de Bernoulli

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\mu} = cte$$

$v$  : vitesse du fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;

$g$  : accélération de la pesanteur ;  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ;  
 $\mu$  : masse volumique du fluide incompressible (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;  
 $p$  : pression du fluide (en Pa) ;  
 $z$  : altitude du point dans le fluide (positive vers le haut) (en m).

## ② PSI Pertes de charge de l'écoulement

$$\Delta \left( \frac{p}{\mu} + gz + \frac{1}{2}v^2 \right) = -\Delta u = -e$$

$v$  : vitesse du fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;  
 $g$  : accélération de la pesanteur ;  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ;  
 $\mu$  : masse volumique du fluide incompressible (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;  
 $p$  : pression du fluide (en Pa) ;  
 $z$  : altitude du point dans le fluide (positive vers le haut) (en m) ;  
 $e$  : dissipation massique (en  $\text{J.kg}^{-1}$ ).

$$\Delta p = -\mu e$$

$\Delta p$  : chute de pression le long de l'écoulement, perte de charge (en Pa) ;  
 $\mu$  : masse volumique du fluide incompressible (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;  
 $e$  : dissipation massique (en  $\text{J.kg}^{-1}$ ).

## ② PSI Bilan de quantité de mouvement

$$-\vec{\mathbf{F}}_{c \rightarrow f} = \vec{\mathbf{P}} + D_m (\vec{\mathbf{v}}_i - \vec{\mathbf{v}}_o) + p_i S_i \frac{\vec{\mathbf{v}}_i}{v_i} - p_o S_o \frac{\vec{\mathbf{v}}_o}{v_o}$$

$-\vec{\mathbf{F}}_{c \rightarrow f}$  : force exercée par un fluide sur une canalisation (en N) ;  
 $D_m$  : débit-masse du fluide (en  $\text{kg.s}^{-1}$ ) ;  
 $v_i = \|\vec{\mathbf{v}}_i\|$  : vitesse du fluide dans la section d'entrée (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;  
 $v_o = \|\vec{\mathbf{v}}_o\|$  : vitesse du fluide dans la section de sortie (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;  
 $S_i, S_o$  : aires des sections droites d'entrée et de sortie (en  $\text{m}^2$ ) ;  
 $p_i, p_o$  : pressions du fluide dans les sections droites d'entrée et de sortie (en Pa) ;  
 $\vec{\mathbf{P}}$  : poids du fluide entre les sections d'entrée et de sortie (en N).

## ② PSI Bilans d'énergie

$$D_m \Delta \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gz \right) = \mathcal{P}_i$$

- $D_m$  : débit-masse du fluide (en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ );  
 $v$  : vitesse du fluide (en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ );  
 $g$  : accélération de la pesanteur ;  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ;  
 $\mu$  : masse volumique du fluide incompressible (en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ );  
 $p$  : pression du fluide (en Pa);  
 $z$  : altitude du point dans le fluide (positive vers le haut) (en m);  
 $\mathcal{P}_i$  : puissance des forces internes au fluide (en W).  
 ( $\mathcal{P}_i = 0$  si le fluide est parfait.)

## 6. Thermodynamique

### 6.1 Description d'un système à l'équilibre

#### ① Système thermodynamique

- Système isolé : aucun transfert (ni de matière, ni d'énergie) avec le milieu extérieur.
- Système fermé : pas de transfert de matière (seulement d'énergie) avec le milieu extérieur.
- Système ouvert : transferts de matière et d'énergie avec le milieu extérieur.

#### ① Pression et force

$$p = \frac{F}{S}$$

- $p$  : pression (Pa)
- $F$  : intensité de la force (N)
- $S$  : surface ( $\text{m}^2$ )

#### ① Lois du gaz parfait

- Loi de Boyle-Mariotte :  $pV = \text{cte}$  à  $T$  et  $m$  fixées.
- Loi de Gay-Lussac et Charles :  $pV$  dépend de  $T$  à  $m$  fixée.
- Loi d'Avogadro–Ampère :  $pV$  est proportionnel à  $n$  à  $T$  fixée.

## ① Équation d'état du gaz parfait

À l'échelle macroscopique

$$pV = nRT$$

À l'échelle mésoscopique

$$p = n^*k_B T$$

$p$  : pression (Pa)

$V$  : volume (m<sup>3</sup>)

$n$  : quantité de matière (mol)

$R$  : constante des gaz parfaits (J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)

$T$  : température (K)

$n^*$  : densité particulaire (m<sup>-3</sup>)

$k_B$  : constante de Boltzmann (J.K<sup>-1</sup>)

## ① Différents types de diagrammes ( $y, x$ ) ou $y = f(x)$

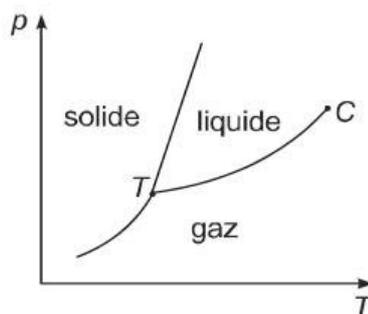
- Diagramme d'Amagat = diagramme ( $pV, p$ )
- Diagramme de Clapeyron = diagramme ( $p, V$ )
- Diagramme de Watt = diagramme ( $p, V$ ) pour les cycles
- Diagramme d'Andrews = diagramme ( $p, V$ ) pour l'équilibre liquide-vapeur
- Diagramme d'état = diagramme ( $p, T$ ).

## 6.2 Changement d'état d'un corps pur

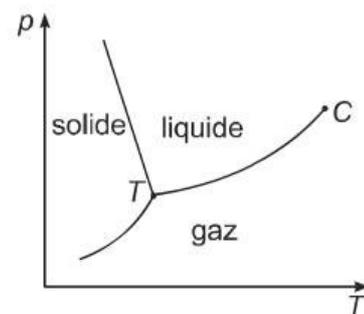
### ① Vocabulaire du changement d'état liquide-vapeur

- Vaporisation = changement d'état dans un volume fermé.
- Évaporation = changement d'état dans un volume ouvert. L'équilibre n'est jamais atteint (les molécules gazeuses se déplacent par diffusion dans tout l'espace).
- Ébullition = changement d'état provoqué par un chauffage poussé. Il se forme des bulles de vapeur à l'intérieur du liquide.

### ① Diagramme d'état



Cas général



Cas particulier (ex : eau)

$C$  : point critique (point au-delà duquel on ne fait plus la différence entre état

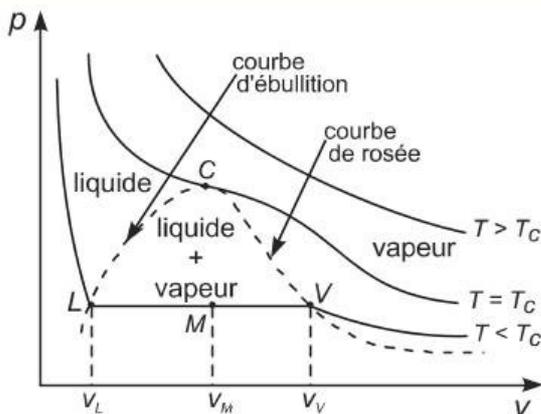
liquide, état gazeux et état fluide)

$T$  : point triple (point où coexistent les trois états de la matière)

$p$  : pression (Pa)

$T$  : température (K)

## 1 Équilibre liquide - vapeur – diagramme d'Andrews



$p$  : pression (Pa)

$v$  : volume massique ( $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ )

## 1 Théorème des moments

$$w_L = \frac{v_M - v_V}{v_L - v_V} = \frac{MV}{LV} = x_L$$

$w_L$  et  $x_L$  : fractions massique et molaire en liquide (sans dimension)

$v_M$ ,  $v_V$  et  $v_L$  : volumes massiques aux points  $M$ ,  $V$  et  $L$  ( $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ )

## 6.3 Travail, transfert thermique, transformations

### 1 Types de transformations

- Quasi statique = infiniment lent :  $p = p_{\text{ext}}$  et  $T = T_{\text{ext}}$  à chaque instant
- Réversible = quasi statique et renversible
- Monotherme :  $T_{\text{ext}} = \text{cte}$  et une seule source extérieure
- Isotherme = monotherme et quasi statique :  $T = T_{\text{ext}} = \text{cte}$  à chaque instant
- Monobare :  $p_{\text{ext}} = \text{cte}$
- Isobare = monobare et quasi statique :  $p = p_{\text{ext}} = \text{cte}$  à chaque instant
- Isochore = monobare et quasi statique :  $V = \text{cte}$
- Adiabatique = athermane = calorifugé = isolé thermiquement

**1****Travail des forces de pression**

$$W_p = - \int_{V_I}^{V_F} p_{\text{ext}} dV$$

$W_p$  et  $x_L$  : travail des forces de pression (J)

$p_{\text{ext}}$  : pression du milieu extérieur (Pa)

$V$  : volume du système ( $\text{m}^3$ )

- Isobare :  $W = -p(V_F - V_I)$
- Isochore :  $W = 0$
- Isotherme :  $W = -nRT \ln \frac{V_F}{V_I}$  pour un gaz parfait

**1****Types de transfert thermique**

- Convection (naturelle ou forcée) : transfert thermique dû à un mouvement macroscopique des particules.
- Conduction : transfert thermique sans déplacement de matière dû à une inhomogénéité de température.
- Rayonnement : transfert thermique dû au fait que tout corps chaud émet un rayonnement pouvant se propager.

**1****Énergie et puissance**

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = \frac{W_p}{\Delta t}$$

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \frac{Q}{\Delta t}$$

$\mathcal{P}_{\text{méca}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{th}}$  : puissances mécanique et thermique (W)

$W_p$  : travail des forces de pression (J)

$Q$  : transfert thermique (J)

$\Delta t$  : durée (s)

## 6.4 Premier et second principes

## ① Énergie interne d'un gaz parfait

$$U = C_V T = \frac{nR}{\gamma - 1} T$$

$$\text{avec } C_V = nC_{V,m} = mc_V$$

$$\text{Gaz monoatomique : } U = \frac{3}{2} N k_B T$$

$U$  : énergie interne (J)

$C_V$ ,  $C_{V,m}$  et  $mc_V$  : capacités thermiques à volume constant (« tout court » en  $\text{J.K}^{-1}$ , molaire en  $\text{J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$  et massique en  $\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ )

$T$  : température (K)

$\gamma$  : rapport des capacités thermiques à pression et volume constants

$N$  : nombre de particules

$k_B$  : constante de Boltzmann ( $\text{J.K}^{-1}$ )

## ① Énergie interne d'une phase condensée supposée indilatable et incompressible

$$U = CT$$

$U$  : énergie interne (J)

$C$  : capacité thermique ( $\text{J.K}^{-1}$ )

$T$  : température (K)

## ① Premier principe de la thermodynamique

$$\Delta E_{\text{tot}} = \Delta U + \Delta E_m = W + Q$$

$$\text{avec } W = W_p + W'$$

$E_{\text{tot}}$  : énergie totale (J)

$U$  : énergie interne (J)

$E_m$  : énergie mécanique (J)

$W$ ,  $W_p$  et  $W'$  : travail, travail des forces de pression et travail utile (J)

$Q$  : transfert thermique (J)

## ① Transformation adiabatique – Loi de Laplace

$$p_I V_I^\gamma = p_F V_F^\gamma = \text{cte 1}$$

$$T_I V_I^{\gamma-1} = T_F V_F^{\gamma-1} = \text{cte 2}$$

$$T_I p_I^{1-\gamma} = T_F p_F^{1-\gamma} = \text{cte 3}$$

$H$  : enthalpie (J)

$I$  et  $F$  : états initial et final

$p$  : pression du système (Pa)

$V$  : volume ( $\text{m}^3$ )

$T$  : température (K)

**1****Enthalpie**

$$H = U + pV$$

$$H = C_p T \quad (\text{gaz parfait})$$

$$H = CT \approx U \quad (\text{état condensé incompressible et indilatable})$$

 $H$  : enthalpie (J) $U$  : énergie interne (J) $p$  : pression du système (Pa) $V$  : volume ( $\text{m}^3$ ) $C_p$  : capacité thermique à pression constante ( $\text{J.K}^{-1}$ ) $C_p$  : capacité thermique ( $\text{J.K}^{-1}$ )**1****Cas d'une transformation monobare**

$$\Delta H = Q_p + W'$$

 $H$  : enthalpie (J) $Q_p$  : transfert thermique à pression constante (J) $W'$  : travail utile (J)**1****Enthalpie de changement d'état**

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} H = H_2 - H_1 = m \ell_{1 \rightarrow 2}$$

 $\Delta_{1 \rightarrow 2} H$  : enthalpie de changement d'état (J) $m$  : masse (kg) $\ell_{1 \rightarrow 2}$  : enthalpie massique de changement d'état ( $\text{J.kg}^{-1}$ )**1****Second principe de la thermodynamique**

$$\Delta S = S_e + S_c$$

$$\text{avec } S_e = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

 $\Delta Q$  : variation d'entropie ( $\text{J.K}^{-1}$ ) $S_e$  : entropie échangée ( $\text{J.K}^{-1}$ ) $S_c$  : entropie créée ( $\text{J.K}^{-1}$ ) $Q_i$  : transfert thermique de la source  $i$  (J) $T_i$  : température de la source  $i$  (K)**1****Entropie de changement d'état**

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} S = S_2 - S_1 = \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} H}{T_{1 \rightarrow 2}}$$

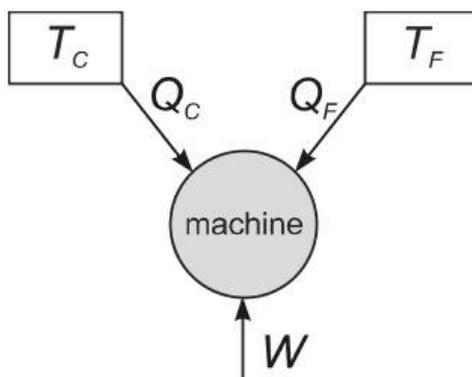
$\Delta_{1 \rightarrow 2} S$  : entropie de changement d'état ( $J.K^{-1}$ )

$\Delta_{1 \rightarrow 2} H$  : enthalpie de changement d'état (J)

$T_{1 \rightarrow 2}$  : température de changement d'état (K)

### 6.5 Machines thermiques

#### 1 Machine ditherme



$T_C$  et  $T_F$  : températures de la source chaude et de la source froide (K)

$Q_C$  et  $Q_F$  : transferts thermiques reçus de la part de la source chaude et de la source froide (J)

$W$  : travail reçu (J)

#### 1 Inégalité de Clausius

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

$T_C$  et  $T_F$  : températures de la source chaude et de la source froide (K)

$Q_C$  et  $Q_F$  : transferts thermiques reçus de la part de la source chaude et de la source froide (J)

#### 1 Rendement d'un moteur

$$\eta = \frac{|\text{énergie utile}|}{|\text{énergie fournie au moteur}|} \leq 1$$

$$\eta = -\frac{W}{Q_C}$$

$\eta$  : rendement du moteur (sans dimension)

$T_C$  et  $T_F$  : températures de la source chaude et de la source froide (K)

$Q_C$  et  $Q_F$  : transferts thermiques reçus de la part de la source chaude et de la source froide (J)

$W$  : travail reçu (J)

#### 1 Théorème de Carnot

$$\eta \leq \eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

$\eta$  : rendement du moteur (sans dimension)

$\eta_C$  : rendement de Carnot (cas réversible)

$T_C$  et  $T_F$  : températures de la source chaude et de la source froide (K)

①

### Efficacité d'un récepteur

$$e = \frac{|\text{énergie utile}|}{|\text{énergie fournie au récepteur}|}$$

$e$  : efficacité du récepteur (sans dimension)

①

### Efficacités frigorifique et thermique

$$e_{\text{fr}} = \frac{Q_F}{W} \leq e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

$$e_{\text{th}} = -\frac{Q_C}{W} \leq e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

$e_{\text{fr}}$ ,  $e_{\text{th}}$  et  $e_C$  : efficacités frigorifique, thermique et de Carnot (cas réversible)

$Q_C$  et  $Q_F$  : transferts thermiques reçus de la part de la source chaude et de la source froide (J)

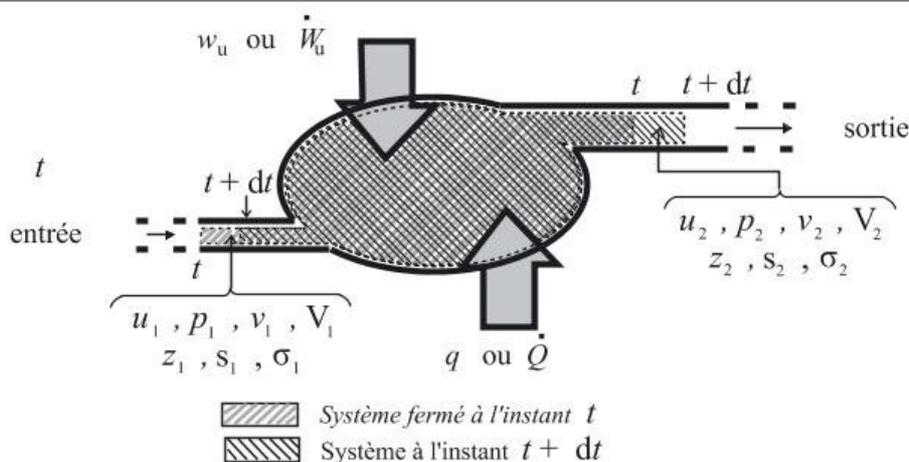
$W$  : travail reçu (J)

$T_C$  et  $T_F$  : températures de la source chaude et de la source froide (K)

## 6.6 Systèmes ouverts

②

### Application du premier principe



- Soit la machine thermique schématisée ci-dessus, fonctionnant en régime stationnaire avec un débit masse  $D_m$ .

$$D_m \cdot \Delta h_g = D_m \cdot (h_{g2} - h_{g1}) = \dot{W}_u + \dot{Q}$$

• **Caractéristiques énergétiques et mécaniques de la machine**

$D_m$  : débit-masse ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$w_u$  et  $q$  : travail utile (autre que celui des forces de pression) et énergie thermique massiques ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$\dot{W}_u$  et  $\dot{Q}$  : puissance utile (autre que celle des forces de pression) et puissance thermique (W);

$\sigma_1$  et  $\sigma_2$  : sections des conduites d'entrée et de sortie de la machine ( $\text{m}^2$ );

$z_1$  et  $z_2$  : altitudes moyennes des sections d'entrée et de sortie du fluide dans la machine (m).

• **Paramètres d'état du fluide**

$u$  : énergie interne massique ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$p$  : pression du fluide (Pa);

$v$  : volume massique ( $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$h = u + pv$  : enthalpie massique ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$V$  : vitesse du fluide dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$s$  : entropie massique du fluide ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ );

1 et 2 : indices respectifs des grandeurs d'entrée et de sortie;

$h_{g1}$ ,  $h_{g2}$  : enthalpies massiques généralisées du fluide en amont et en aval de la machine thermique ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$D_m$  : débit-masse ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$h_g = h + gz + \frac{1}{2}V^2 = u + pv + gz + \frac{1}{2}V^2$  : enthalpie massique généralisée ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

$$D_m = \sigma_1 \frac{V_1}{v_1} = \sigma_2 \frac{V_2}{v_2}$$

$$\Delta h_g = h_{g2} - h_{g1} = w_u + q$$

Le travail utile massique et la puissance mécanique utile étant liés par :

$$D_m w_u = \dot{W}_u \quad D_m q = \dot{Q}$$

ATTENTION : L'enthalpie généralisée est parfois définie sans le terme  $gz$ . Lorsque tel est le cas,  $w_u$  ( $\dot{W}$ ) doit comptabiliser aussi le travail massique (la puissance) des forces de pesanteur.

2

## Application du second principe

$$s_2 - s_1 = s_e + s_c$$

$s_1$ ,  $s_2$  : entropies massiques en amont et en aval de la machine (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$s_e$  : entropie massique échangée; (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ );

$s_c$  : entropie massique créée; (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

$$D_m \cdot (s_2 - s_1) = \dot{S}_e + \dot{S}_c$$

$D_m$  : débit-masse ; (en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ;

$\dot{S}_e$  : taux horaire d'entropie d'échange ; (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ;

$\dot{S}_c$  : taux horaire de création d'entropie ; (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

$$\dot{S}_e = D_m s_e \quad \dot{S}_c = D_m s_c$$

## 7. Statique des fluides

### ① Force surfacique : la force de pression

$$\vec{f}_s(\vec{r}) = -p(\vec{r}) \vec{n}(\vec{r})$$

$\vec{f}_s(\vec{r})$  : densité surfacique de force au point  $\vec{r}$  ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) ;

$p(\vec{r})$  : pression dans le fluide au point  $\vec{r}$  (Pa) ;

$\vec{n}(\vec{r})$  : normale unitaire à une surface dans le fluide au point  $\vec{r}$  (orientée de la surface vers le fluide) (sans dimension).

$$\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{f}_s \, dS$$

$\vec{S}$  : résultante des forces surfaciques (N) ;

$\vec{f}_s(\vec{r})$  : densité surfacique de force au point  $\vec{r}$  ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) ;

$\Sigma$  : surface fermée ( $\text{m}^2$ ).

### ① Force volumique : la force de pesanteur

$$d\vec{P} = \rho \vec{g} \, d\tau$$

$d\vec{P}$  : force de pesanteur élémentaire ou poids élémentaire (norme en N)

$\rho$  : masse volumique ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )

$\vec{g}$  : champ de pesanteur (norme en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )

$d\tau$  : élément de volume ( $\text{m}^3$ )

### ① Équation fondamentale de la statique des fluides

$$\vec{\text{grad}} p - \vec{f}_v = \vec{0}$$

$p$  : pression dans le fluide ; (en Pa) ;

$\vec{f}_v$  : densité volumique des forces de champ ; (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

1

## Statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme

- Champ de pression dans un fluide incompressible

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g$$

$p$  : pression dans le fluide ; (en Pa) ;

$z$  : altitude dans le fluide (orientation verticale ascendante) ; (en m) ;

$\mu$  : masse volumique constante du fluide ; (en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ;

$g$  : accélération de la pesanteur ;  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

- Champ de pression dans un gaz à l'équilibre isotherme

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g = -\frac{Mg}{RT} p$$

$p$  : pression dans le gaz ; (en Pa) ;

$z$  : altitude dans le gaz (orientation verticale ascendante) ; (en m) ;

$\mu$  : masse volumique du gaz (en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ;

$g$  : accélération de la pesanteur  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ;

$M$  : masse molaire du gaz (en  $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) ;

$R$  : constante des gaz parfaits  $8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  ;

$T$  : température absolue du gaz (en K).

1

## Densité particulaire et facteur de Boltzmann

$$n^*(z) = n^*(0) e^{-\frac{E_p(z)}{k_B T}}$$

$n^*$  : densité particulaire ( $\text{m}^{-3}$ )

$E_p$  : énergie potentielle de pesanteur (J)

$k_B$  : constante de Boltzmann ( $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ )

$T$  : température (K)

$e^{-\frac{E_p(z)}{k_B T}}$  : facteur de Boltzmann (sans dimension)

1

## Poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi} = \rho V_i \vec{g}$$

$\vec{\Pi}$  : poussée d'Archimède (norme en N)

$\rho$  : masse volumique du fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ )

$V_i$  : volume du corps immergé ( $\text{m}^3$ )

$\vec{g}$  : accélération de la pesanteur (norme en  $\text{m.s}^{-2}$ )

### ① Équivalent volumique des forces de pression

$$\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}} p \cdot d\tau$$

$\vec{f}_v$  : force volumique de pression (norme en  $\text{N.m}^{-3}$ )

$\overrightarrow{\text{grad}}$  : opérateur gradient

$p$  : pression (Pa)

$d\vec{F}$  : force de pression élémentaire (norme en N)

$d\tau$  : volume élémentaire ( $\text{m}^3$ )

### ① Équation locale de la statique des fluides

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{f}_v$$

$p$  : pression (Pa)

$\rho$  : masse volumique du fluide ( $\text{kg.m}^{-3}$ )

$\vec{f}_v$  : force volumique de pression

( $\vec{g}$  si la seule force volumique est le poids) (norme en  $\text{N.m}^{-3}$ )

## 8. Électromagnétisme

### 8.1 Action d'un champ magnétique

#### ① Champ magnétique créé par une bobine "infinie"

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

$\vec{B}_{\text{int}}$  : champ magnétique à l'intérieur de la bobine (norme en T)  
 $\mu_0$  : perméabilité du vide ( $\text{H.m}^{-1}$ )  
 $n$  : nombre de spires par unité de longueur ( $\text{m}^{-1}$ )  
 $I$  : intensité du courant (A)  
 $\vec{u}_z$  : vecteur unitaire sur l'axe de la bobine, orienté par la règle du tire-bouchon et le sens de  $I$  (sans dimension)

### 1 Moment magnétique d'un dipôle (spire ou aimant)

$$\vec{m} = IS \vec{n}$$

$\vec{m}$  : moment magnétique (norme en  $\text{A.m}^2$ )  
 $I$  : intensité du courant (A)  
 $S$  : surface de la spire ou section de l'aimant ( $\text{m}^2$ )  
 $\vec{n}$  : vecteur unitaire normal à la surface, orienté par la règle du tire-bouchon et le sens de  $I$  (sans dimension)

### 1 Force de Laplace (pour un élément de courant filiforme)

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

Résultante :  $\vec{F} = \int d\vec{F}$   
 (nulle pour un champ magnétique uniforme et stationnaire)

$\vec{F}$  : force de Laplace (norme en N)  
 $I$  : intensité du courant (A)  
 $d\ell$  : élément de longueur (m)  
 $\vec{B}_{\text{ext}}$  : champ magnétique extérieur au circuit (norme en T)

### 2 Densité volumique des forces de Laplace

$$\vec{f}_{L_v}(\vec{r}) = \vec{j}(\vec{r}) \wedge \vec{B}(\vec{r}) \quad \vec{f}_L = \iiint_V \vec{f}_{L_v}(\vec{r}) d\tau$$

- $\vec{f}_{Lv}$  : densité volumique des forces de Laplace au point  $\vec{r}$  (en  $\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$ );  
 $\vec{f}_L$  : résultante des forces de Laplace volumiques (en N);  
 $\vec{j}(\vec{r})$  : densité volumique de courant électrique (en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ );  
 $\vec{B}(\vec{r})$  : champ magnétique au point  $\vec{r}$  de la distribution (en T).

②

## Couple magnétique

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

- $\vec{\Gamma}$  : moment du couple magnétique (norme en  $\text{N}\cdot\text{m}$ );  
 $\vec{m}$  : moment magnétique (norme en  $\text{A}\cdot\text{m}^2$ );  
 $\vec{B}_{\text{ext}}$  : champ magnétique extérieur au circuit (norme en T).

## 8.2 Induction, auto-induction et couplage

①

## Flux d'un champ magnétique

$$\Phi = \oint_C \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

- $\Phi$  : flux magnétique (Wb);  
 $C$  : contour fermé orienté;  
 $\vec{n}$  : vecteur normal au circuit, orienté par rapport au courant par la règle du tire-bouchon (sans dimension);  
 $\vec{B}$  : champ magnétique (norme en T);  
 $dS$  : élément de surface ( $\text{m}^2$ ).

①

## Loi de Faraday - force électromotrice

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- $e$  : force électromotrice induite (V)  
 $\Phi$  : flux magnétique (Wb)  
 $t$  : temps (s)

①

## Loi de Lenz

Un phénomène d'induction magnétique agit toujours de façon telle qu'il s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

Ainsi, si l'intensité d'un champ magnétique  $\vec{B}$  diminue, le courant induit crée un champ magnétique dans le même sens que  $\vec{B}$  qui compense cette diminution.

**1 Auto-induction, flux propre et inductance propre**

$$\Phi = Li$$

$\Phi$  : flux magnétique propre (Wb)  
 $L$  : inductance propre (H)  
 $i$  : intensité du courant (A)

**1 Force électromotrice d'auto-induction**

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$e$  : force électromotrice d'auto-induction (V)  
 $\Phi$  : flux magnétique (Wb)  
 $t$  : temps (s)  
 $i$  : intensité du courant (A)

**1 Travail reçu lors de l'auto-induction**

$$\delta W = e i dt = -i d\Phi = -Li di$$

$$W = \int_0^i Li di$$

$W$  : travail reçu (J)  
 $e$  : force électromotrice d'auto-induction (V)  
 $i$  : intensité du courant (A)  
 $t$  : temps (s)  
 $\Phi$  : flux magnétique (Wb)  
 $L$  : inductance propre (H)

**1 Énergie potentielle magnétique**

$$E_p = -\int \delta W = \int_0^i Li di = \frac{1}{2}Li^2$$

$E_p$  : énergie potentielle (J)  
 $\delta W$  : travail élémentaire reçu (J)  
 $L$  : inductance propre (H)  
 $i$  : intensité du courant (A)

**1 Bobines en interaction – inductance mutuelle**

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21}i_2$$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12}i_1$$

$$M_{12}M_{21} = M$$

$\Phi_{i \rightarrow j}$  : flux du champ magnétique induit par  $i$  sur  $j$  (Wb)  
 $M_{ij}$  et  $M$  : inductance mutuelle (H)  
 $i_k$  : intensité du courant dans le circuit  $k$  (A)

**①****Flux total**

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \text{flux propre} + \text{flux induit} \\ &= Li_1 + Mi_2\end{aligned}$$

$\Phi_1$  : flux du champ magnétique du circuit 1 (Wb)

$L$  : inductance propre (H)

$M$  : inductance mutuelle (H)

$i_k$  : intensité du courant dans le circuit  $k$  (A)

**8.3 Conversion de puissance électromécanique****①****Rails de Laplace – conversion de puissance**

$$\text{Équation mécanique : } m \frac{dv}{dt} = iBd$$

$$\text{Équation électrique : } e = Ri = -Bdv$$

$$\text{Équation finale : } \frac{dv}{dt} + \frac{a^2 B^2}{mR} v = 0$$

$m$  : masse de la barre (kg)

$v$  : vitesse (m.s<sup>-1</sup>)

$i$  : intensité du courant (A)

$B$  : champ magnétique (T)

$e$  : force électromotrice (V)

$R$  : résistance ( $\Omega$ )

$d$  : distance entre les rails (m)

**①****Puissance des forces de Laplace**

$$d\mathcal{P} = \vec{dF} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Rails de Laplace : } \mathcal{P} = I\ell v B_{\text{ext}}$$

$\mathcal{P}$  : puissance des forces de Laplace (W)

$\vec{dF}$  : force élémentaire de Laplace (norme en N)

$v$  : vitesse de la tige (m.s<sup>-1</sup>)

$I$  : intensité du courant (A)

$\ell$  : distance entre les rails (m)

$B_{\text{ext}}$  : champ extérieur au circuit (T)

**①****Courants de Foucault**

Les courants induits peuvent occasionner des échauffements importants par effet Joule. On parle de courant de Foucault.

Application : système de freinage par induction.

**①****Haut-parleur et microphone**

Un haut-parleur est constitué d'un aimant permanent cylindrique. Sur l'entrefer

de cet aimant repose une bobine mobile. Celle-ci est solidaire d'une membrane et, lorsqu'elle est parcourue par un courant alternatif, permet les vibrations de la membrane.

Le haut-parleur convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique.

Le dispositif inverse est le microphone.

## 8.4 Conservation de la charge électrique

2

### Densités volumique de courant électrique

$$\vec{\mathbf{j}}_i(\vec{\mathbf{r}}, t) = \rho_i(\vec{\mathbf{r}}, t) \vec{\mathbf{v}}_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$\vec{\mathbf{j}}_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$  : densité volumique de courant électrique dû aux charges d'espèce  $i$  au point  $\vec{\mathbf{r}}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\rho_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$  : densité volumique de charges électriques mobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$  des charges de l'espèce  $i$  au point  $\vec{\mathbf{r}}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{C.m}^{-3}$ );

$\vec{\mathbf{v}}_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$  : vitesse moyenne des charges de l'espèce  $i$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  au point  $\vec{\mathbf{r}}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ ).

$$\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_i \vec{\mathbf{j}}_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$$\rho(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_i \rho_i(\vec{\mathbf{r}}, t)$$

$\vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  : densité volumique de courant électrique dû à toutes les espèces de charges au point  $\vec{\mathbf{r}}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\rho(\vec{\mathbf{r}}, t)$  : densité volumique de charges mobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de toutes les espèces de charges en  $\vec{\mathbf{r}}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{C.m}^{-3}$ );

$\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}, t)$  : vitesse moyenne des charges mobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$  au point  $\vec{\mathbf{r}}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ ).

2

### Définition de l'intensité du courant électrique

$$I(t) = \iint_{S \text{ (resp. } \Sigma)} \vec{\mathbf{j}}(\vec{\mathbf{r}}, t) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$I(t)$  : intensité du courant électrique à travers une section  $S$  d'un conducteur ou la surface fermée  $\Sigma$ ; (en A);

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  : densité volumique de courant dû à toutes les espèces de charges au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ ; (en  $\text{A.m}^{-2}$ ).

**②**

### Équation de continuité par espèce, à une dimension

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_{ix}}{\partial x}(x, t) = \sigma_i(x, t)$$

$j_{ix}(x, t)$  : densité volumique de courant des charges d'espèce  $i$  en tout point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\rho_i(x, t)$  : densité volumique de charges mobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$  des charges de l'espèce  $i$  en tout point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{C.m}^{-3}$ );

$\sigma_i(x, t)$  densité volumique de création de charge électrique de l'espèce  $i$  par unité de temps en tout point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{C.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$ ).

**②**

### Conservation de la charge électrique

$$\sum_i \sigma_i(\vec{r}, t) = 0$$

**②**

### Équation de continuité de la charge électrique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial j_x}{\partial x}(x, t) = 0$$

$\rho(x, t)$  : densité volumique de charges électriques mobiles en tout point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  ( $\text{C.m}^{-3}$ );

$j_x(x, t)$  : densité volumique de courant électrique en tout point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  ( $\text{A.m}^{-2}$ ).

**①**

### Généralisation à trois dimensions

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{r}, t) + \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  : densité volumique de courant électrique dû à toutes les espèces de charges au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\rho(\vec{r}, t)$  : densité volumique de charges mobiles dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de toutes les espèces de charges en  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$ ; (en  $\text{C.m}^{-3}$ ).

### 1 Loi d'Ohm locale

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \gamma \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  : densité volumique de courant électrique dû à toutes les espèces de charges au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  ( $\text{A.m}^{-2}$ );

$\gamma$  : conductivité du milieu conducteur ( $\text{S.m}^{-1}$ );

$\vec{E}(\vec{r}, t)$  : champ électrique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  ( $\text{V.m}^{-1}$ ).

$$\gamma = \frac{q^2 \tau n_q}{m}$$

$q$  : charge électrique des porteurs mobiles de charge électrique (C);

$n_q$  : densité volumique de ces porteurs mobiles ( $\text{m}^{-3}$ );

$m$  : masse d'un porteur mobile de charge électrique (kg);

$\tau$  : temps caractérisant la force de frottement fluide dans le modèle de Drude (s).

### 2 Résistance d'un conducteur ohmique

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

$R$  : résistance d'un conducteur ohmique cylindrique ( $\Omega$ );

$l$  : longueur du cylindre (m);

$S$  : aire de la section droite du cylindre ( $\text{m}^2$ ).

### 2 Loi de Joule

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2$$

$p_v$  : densité volumique de puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique ( $\text{W.m}^{-3}$ );

$\gamma$  : conductivité du conducteur ohmique;

$\vec{E}$  : champ électrique dans le milieu conducteur.

## 8.5 Distributions de charge et champ électrostatique

② MP

### Force de Coulomb

$$\vec{\mathbf{f}}_{q_1 \rightarrow q_2} = -\vec{\mathbf{f}}_{q_2 \rightarrow q_1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3}$$

$\vec{\mathbf{f}}_{q_1 \rightarrow q_2}$  : force électrostatique que la charge  $q_1$  fixe en  $M_1$  dans le référentiel d'étude exerce sur la charge  $q_2$  fixe en  $M_2$  (en N) ;

$q_1, q_2$  (en C) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,854 \times 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>.

② MP

### Champ électrostatique d'une charge électrique ponctuelle

$$\vec{\mathbf{E}}(P) = \frac{\vec{\mathbf{f}}_{q \rightarrow q_t}}{q_t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{MP}}{\|\overrightarrow{MP}\|^3}$$

$\vec{\mathbf{E}}(P)$  : champ électrostatique créé au point  $P$  par la charge  $q$  fixe en  $M$  dans le référentiel d'étude (en V.m<sup>-1</sup>).

② MP

### Modélisations des distributions de charge électrique

$$dq = \rho(\vec{\mathbf{r}})d\tau$$

$\rho(\vec{\mathbf{r}})$  : densité volumique de charge (en C.m<sup>-3</sup>) ;

$dq$  : charge (en C) contenue dans le volume  $d\tau$  (en m<sup>3</sup>) au point  $\vec{\mathbf{r}}$  de l'espace.

$$dq = \sigma(\vec{\mathbf{r}})dS$$

$\sigma(\vec{\mathbf{r}})$  : densité surfacique de charge (en C.m<sup>-2</sup>) ;

$dq$  : charge (en C) contenue sur la surface  $dS$  (en m<sup>2</sup>) au point  $\vec{\mathbf{r}}$  de l'espace.

$$dq = \lambda(\vec{\mathbf{r}})dl$$

$\lambda(\vec{\mathbf{r}})$  : densité linéique de charge (en C.m<sup>-1</sup>) ;

$dq$  : charge (en C) contenue sur le segment  $dl$  (en m) au point  $\vec{\mathbf{r}}$  de l'espace.

Charge totale de ces distributions :

$$Q = \iiint_V \rho(\vec{r}) d\tau \quad \text{ou} \quad Q = \iint_S \sigma(\vec{r}) dS \quad \text{ou} \quad Q = \int_C \lambda(\vec{r}) dl$$

## ② Symétries et invariances des distributions de charge électrique

$$\rho(M) = \rho(\mathcal{T}(M))$$

$\rho$  : distribution volumique de charge invariante par l'isométrie affine  $\mathcal{T}$ .

Éléments d'invariance caractéristiques

1. invariance par translation selon une direction donnée ( $\vec{e}_x$  par ex.) :  
 $\rho(x, y, z) = \rho(y, z)$  ;
2. invariance par toute rotation autour d'une direction donnée (symétrie de révolution) :  $\rho(r, \theta, z) = \rho(r, z)$  ;
3. invariance par toute rotation autour d'une direction quelconque passant par un point donné (symétrie sphérique) :  $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r)$  ;
4. invariance par rapport à un plan de symétrie (par ex.  $x = 0$ ) :  
 $\rho(-x, y, z) = \rho(x, y, z)$  ;
5. invariance par rapport à un plan d'antisymétrie (par ex.  $x = 0$ ) :  
 $\rho(-x, y, z) = -\rho(x, y, z)$ .

## ② Conséquence sur le champ électrostatique

$$\vec{\mathbf{E}}(\mathcal{T}(P)) = T(\vec{\mathbf{E}}(P))$$

$\vec{\mathbf{E}}(P)$  : champ électrostatique en  $P$  d'une distribution invariante par l'élément d'invariance  $\mathcal{T}$ , d'application linéaire associée  $T$ .

Distribution de charge électrique

1. invariante par translation selon une direction donnée (par ex.  $\vec{e}_x$ ) :  
 $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = E_y(y, z)\vec{e}_y + E_z(y, z)\vec{e}_z$  ;
2. à symétrie de révolution autour de l'axe  $z'z$  :  
 $\vec{\mathbf{E}}(r, \theta, z) = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$  ;
3. à symétrie sphérique autour du point  $O$  :  $\vec{\mathbf{E}}(r, \theta, \varphi) = E_r(r)\vec{e}_r$  ;
4. invariante par rapport au plan de symétrie (par ex.  $x = 0$ ) :  
 $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z$  où  $E_x$  est impaire en  $x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sont paires en  $x$  ;
5. antisymétrique par rapport à un plan (par ex.  $x = 0$ ) :  $E_x$  est paire en  $x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sont impaires en  $x$ .



②

## Recherche des invariances

Choisir un point  $P$  quelconque et rechercher si des plans de symétrie de la distribution passent par ce point. Si tel est le cas, le champ électrostatique appartient aux plans vectoriels directeurs de ces plans affines de symétrie, donc à leur intersection : ceci fixe la direction du champ électrostatique en ce point  $P$ .

Rechercher les invariances par translations : la composante restante du champ électrique ne dépend pas des coordonnées le long des directions d'invariance par translation.

## 8.6 Équations de Maxwell dans le vide

$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Maxwell-Gauss
$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$	Maxwell-Faraday
$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$	Maxwell-flux
$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$	Maxwell-Ampère

$\vec{\mathbf{E}}$  : champ électrique ( $\text{V.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{B}}$  : champ magnétique (T);

$\rho$  : densité volumique de charge électrique ( $\text{C.m}^{-3}$ );

$\vec{\mathbf{j}}$  : densité volumique de courants électriques ( $\text{A.m}^{-2}$ );

$\varepsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

## 8.7 Propriétés du champ électrostatique

②

## Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

$$C_{A \rightarrow B}(\vec{\mathbf{E}}) = \int_A^B \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$C_{A \rightarrow B}(\vec{\mathbf{E}})$  : circulation du champ électrostatique de  $A$  à  $B$  (V).

- Circulation du champ d'une charge ponctuelle  $q$  fixe en  $\vec{r}_M$  entre  $A$  et  $B$ ,

indépendante du chemin suivi :

$$C_{A \rightarrow B}(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_M\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_B - \vec{r}_M\|} \right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_M\|} + cte$$

$V(\vec{r})$  : potentiel électrostatique au point  $\vec{r}$  de la charge  $q$  fixe en  $\vec{r}_M$  (en V).

- $C_{A \rightarrow B}(\vec{E}) = V(A) - V(B)$

La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est nulle.

## ② MP Équation locale du champ électrostatique

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Théorème de Stokes

$$\int_{\Gamma} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

## ② Potentiel électrostatique

- $C_{A \rightarrow B}(\vec{E}) = V(A) - V(B)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique au point  $\vec{r}$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;

$V(\vec{r})$  : potentiel électrostatique au point  $\vec{r}$  (en V).

## ② Équation de Poisson du potentiel électrostatique

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$V$  : potentiel électrostatique (en V) ;

$\rho$  : densité volumique de charge électrique (en  $\text{C.m}^{-3}$ ) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,854 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

## ② Énergie potentielle et potentiel électrostatique

$$\mathcal{E}_{pe}(\vec{r}) = q V(\vec{r}) + cte$$

$\mathcal{E}_{pe}(\vec{r})$  : énergie potentielle de la charge (en J) ;

$q$  : charge électrique placée au point  $\vec{r}$  (en C) ;

$V(\vec{r})$  : potentiel électrostatique créé par toutes les charges autres que  $q$  (en V).

## ② Potentiel électrostatique d'une distribution de charges

Soit  $\{q_i\}_{i \in I}$ , fixes dans  $\mathcal{R}$ , en  $\{\vec{r}_i\}_{i \in I}$ . Le potentiel qu'elles créent au point  $\vec{r}$  est, selon le principe de superposition :

$$V(\vec{r}) = \sum_{i \in I} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|} + cte$$

## ② Champ et potentiel électrostatiques

Caractère conservatif du champ électrostatique :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r})$$

## ② Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

$$\mathcal{E}_{pe}(\vec{r}) = q V(\vec{r}) + cte$$

$\mathcal{E}_{pe}(\vec{r})$  : énergie potentielle électrostatique de la charge  $q$  placée au point  $\vec{r}$  dans le potentiel  $V(\vec{r})$  (en J).

## ② Flux du champ électrostatique

$$d\Phi = \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$d\Phi$  : flux élémentaire du champ électrostatique (en V.m) ;

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r})$  : champ électrostatique au point  $\vec{r}$  (en V.m<sup>-1</sup>) ;

$d\vec{S}$  : élément de surface positionné au point  $\vec{r}$ , d'aire  $dS$  et perpendiculaire à la direction de  $\vec{n}(\vec{r})$  (en  $m^2$ ).

$$\Phi = \iint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad \text{ou} \quad \iint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

$\Phi$  : flux du champ électrostatique à travers la surface ouverte  $S$  ou fermée  $\Sigma$ .

## ② Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique au point  $\vec{r}$  de la surface fermée  $\Sigma$  (en  $V.m^{-1}$ );  
 $Q_{\Sigma}$  : partie de la charge électrique de la distribution à l'origine du champ, enfermée à l'intérieur de  $\Sigma$ ;  
 $\epsilon_0$  permittivité diélectrique du vide.

## ② Formulation locale du théorème de Gauss

$$\text{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique au point  $\vec{r}$  créé par la distribution de charge électrique (en  $V.m^{-1}$ );  
 $\rho(\vec{r})$  : densité volumique de charge électrique au point  $\vec{r}$  (en  $C.m^{-3}$ );  
 $\text{div}$  : opérateur divergence.

## 8.8 Champs électrostatiques de distributions particulières

### ② Champ électrostatique du plan uniformément chargé

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

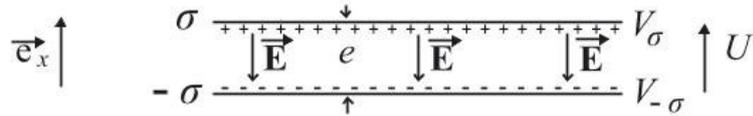
$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique au point  $\vec{r}$  (en  $V.m^{-1}$ );  
 $\sigma$  : densité surfacique de charge, constante, sur le plan  $z = 0$  (en  $C.m^{-2}$ );

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;

$z$  : troisième coordonnée cartésienne du point  $\vec{r}$  (en m) ;

$\vec{e}_z$  : normale orientée de l'armature portant  $\sigma$  vers celle portant  $-\sigma$ .

## 2 Champ et capacité du condensateur plan



$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } |z| < e \\ \vec{0} & \text{si } |z| > 0 \end{cases}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique en  $\vec{r}$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;

$\sigma$  : densité surfacique de charge, constante, sur le plan  $z = -\frac{e}{2}$ , le plan  $z = \frac{e}{2}$

étant chargé avec la densité surfacique  $-\sigma$  (en  $\text{C.m}^{-2}$ ) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;

$z$  : troisième coordonnée cartésienne du point  $\vec{r}$  (en m).

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

$C$  : capacité du condensateur (en F) ;

$S$  : aire des armatures planes parallèles en vis-à-vis (en  $\text{m}^2$ ) ;

$e$  : distance entre les armatures (en m) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide.

## 2 Cylindre infini uniformément chargé

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{si } R < r \end{cases}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique en  $\vec{r}$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;

$\rho_0$  : densité volumique de charge, constante, à l'intérieur du cylindre d'axe  $z'z$  de rayon  $R$  (en  $\text{C.m}^{-3}$ ) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;

$r$  : distance à l'axe  $z'z$  du point  $\vec{r}$  (en m).

**2** Sphère uniformément chargée

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{si } R < r \end{cases}$$

$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique en  $\vec{r}$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ );  
 $\rho_0$  : densité volumique de charge, constante, à l'intérieur de la sphère de centre  $O$  de rayon  $R$  (en  $\text{C.m}^{-3}$ );  
 $\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide;  
 $r$  : distance de  $O$  au point  $\vec{r}$  (en m).

**8.9 Analogie pour le champ de gravitation**

**2** Définition du champ de gravitation

$$\vec{G}(P) = -\mathcal{G}m \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|^3}$$

$\vec{G}(P)$  : champ de gravitation au point  $P$  (en  $\text{m.s}^{-2}$ );  
 $\mathcal{G}$  : constante de gravitation universelle ;  $6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$  ;  
 $m$  : masse ponctuelle fixe en  $M$  (en kg).

**2** Potentiel de gravitation

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_G(\vec{r})$$

$\vec{G}(P)$  : champ de gravitation au point  $\vec{r}$  ;  
 $V_G(\vec{r})$  : potentiel de gravitation au point  $\vec{r}$  (en  $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$ ).

$$V_G(\vec{r}) = -\mathcal{G}m \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_M\|} + cte$$

$V_G(\vec{r})$  : potentiel de gravitation au point  $\vec{r}$  ;  
 $\mathcal{G}$  : constante de gravitation universelle ;  
 $m$  : masse ponctuelle fixe en  $\vec{r}_M$  (en kg).

②

## Flux du champ de gravitation et théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma} \vec{G}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G} M_{\Sigma}$$

$\vec{G}(P)$  : champ de gravitation au point  $\vec{r}P$  de la surface fermée  $\Sigma$  ;

$\mathcal{G}$  : constante de gravitation universelle ;

$M_{\Sigma}$  : masse de la partie de la distribution contenue dans  $\Sigma$  (en kg) ;

$$M_{\Sigma} = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(\vec{r}) d\tau$$

$\mu(\vec{r})$  : densité volumique de masse au point  $\vec{r}$  (en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ).

- Le champ d'une distribution de masse à symétrie sphérique de rayon  $R$  : par analogie avec le champ électrostatique de la sphère uniformément chargée,

$$\vec{G}(\vec{r}) = \begin{cases} -4\pi\mathcal{G}\frac{\mu_0 r}{3} \vec{e}_r & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ -4\pi\mathcal{G}\frac{\mu_0 R^3}{3r^2} \vec{e}_r & \text{si } R < r \end{cases}$$

$\vec{G}(P)$  : champ de gravitation au point  $\vec{r}$  ;

$\mathcal{G}$  : constante de gravitation universelle ;

$\mu_0$  : densité volumique de masse, constante, de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  (en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) ;

$r$  : distance de  $O$  au point  $\vec{r}$  (en m).

### 8.10 Dipôles électriques

② MP

#### Le moment dipolaire

$$\vec{p} = \sum_{i \in I} q_i \vec{r}_i$$

$\vec{p}$  : moment dipolaire d'une distribution neutre de charges électriques ; unité

C.m ou bien le debye D,  $1 \text{ D} = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$  ;

$q_i$  : charge ponctuelle au point  $\vec{r}_i$  ;  $\sum_{i \in I} q_i = 0$ .

$$\vec{p} = q^+(\vec{r}^+ - \vec{r}^-)$$

$\vec{p}$  : moment dipolaire d'une distribution neutre de charges électriques ;  
 $\vec{r}^+$ ,  $\vec{r}^-$  : positions des barycentres des charges positives et négatives ;  
 $q^+$  : somme des charges positives de la distribution ; unité : C.

## ② MP

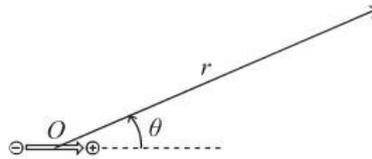
### Potentiel électrostatique du dipôle

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$V(\vec{r})$  : potentiel électrostatique en  $\vec{r}$ , à grande distance de la distribution ;  
 $\vec{p}$  : moment dipolaire de la distribution neutre de charges électriques ;  
 $\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  
 $r = \|\vec{r}\|$ .

En coordonnées sphériques :

$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{où} \quad (r, \theta, \varphi) : \text{coordonnées du point } \vec{r} \quad \text{et} \quad p = \|\vec{p}\|.$$



## ② MP

### Champ électrostatique du dipôle

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p})$$

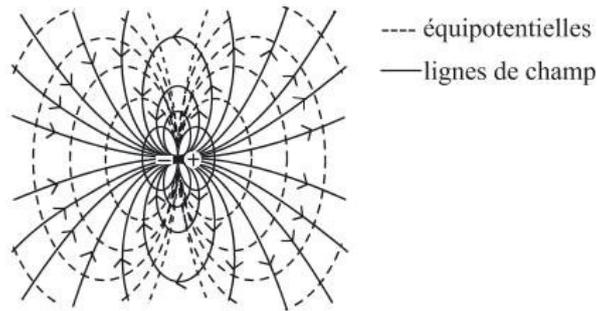
$\vec{E}(\vec{r})$  : champ électrostatique en  $\vec{r}$ , à grande distance de la distribution ;  
 $\vec{p}$  : moment dipolaire de la distribution neutre de charges électriques ;  
 $\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  
 $r = \|\vec{r}\|$ .

En coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

où  $(r, \theta, \varphi)$  : coordonnées du point  $\vec{r}$  et  $p = \|\vec{p}\|$ .

Lignes de champ et équipotentielles du dipôle électrostatique :



## ② MP Action des champs électriques sur les dipôles

$$\vec{\mathbf{f}}_e = (\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{grad}}) \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$$

$\vec{\mathbf{f}}_e$  : force exercée sur le dipôle (en N) ;

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$  : champ électrique extérieur en  $\vec{\mathbf{r}}$  ;

$\vec{\mathbf{p}}$  : moment dipolaire du dipôle rigide ;

$\vec{\mathbf{r}}$  : vecteur position du dipôle électrostatique ;

$\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{grad}}$  : opérateur  $p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$  à appliquer à chacune des composantes cartésiennes du champ électrostatique.

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{\mathbf{p}}/\mathcal{R}) = \vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$$

$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{\mathbf{p}}/\mathcal{R})$  : moment résultant des forces électrostatiques s'exerçant sur le dipôle (en N.m) ;

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$  : champ électrique extérieur en  $\vec{\mathbf{r}}$  ;

$\vec{\mathbf{p}}$  : moment dipolaire du dipôle rigide.

## ② MP Énergie potentielle du dipôle électrique

$$\mathcal{E}_{pe} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$$

$\mathcal{E}_{pe}$  : énergie potentielle du dipôle rigide (en J) ;

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$  : champ électrique extérieur en  $\vec{\mathbf{r}}$  ;

$\vec{\mathbf{p}}$  : moment dipolaire du dipôle rigide.

## ② MP Interactions dipolaires et forces de Van der Waals

Les forces de Van der Waals sont les forces d'interactions d'origine essentiellement dipolaire qui existent entre les molécules.

Entre dipôles permanents, elles donnent lieu aux interactions de Keesom ; entre un dipôle permanent et un dipôle induit, aux interactions de Debye ; et enfin, entre dipôles induits, à celles de London.

### 8.11 Champs magnétostatiques

#### ② Symétries et invariances des sources du champ magnétique

$$T(\vec{j}(M)) = \vec{j}(\mathcal{T}(M))$$

$\mathcal{T}$  : isométrie affine par laquelle la distribution de courants est dite invariante ;  
 $T$  : isométrie vectorielle associée à  $\mathcal{T}$  ;

$\vec{j}(M)$  : densité volumique de courant électrique au point  $M$  ;

$\vec{j}(\mathcal{T}(M))$  : densité volumique de courant électrique au point  $\mathcal{T}(M)$ .

Éléments d'invariance caractéristiques des distributions de courants électriques

1. invariance par translation selon une direction donnée ;
2. invariance par toute rotation autour d'une direction donnée ;
3. invariance par toute rotation autour d'une direction passant par  $O$  ;
4. invariance par symétrie par rapport à un plan affine ;
5. antisymétrie par rapport à un plan.

#### ② Conséquences sur le champ magnétostatique

Les plans de symétrie des distributions de courants électriques sont des plans d'antisymétrie du champ magnétostatique qu'elles créent : les champs magnétostatiques en deux points symétriques par rapport au plan sont opposés par rapport à ce plan.

En un point  $P$  du plan de symétrie, le champ magnétostatique est perpendiculaire au plan.

Les plans d'antisymétrie des distributions de courants électriques sont des plans de symétrie du champ magnétostatique : les champs magnétostatiques en deux points symétriques par rapport au plan sont symétriques par rapport à ce plan.

En un point  $P$  du plan d'antisymétrie, le champ magnétostatique appartient au plan.

②

## Recherche des invariances

• Choisir un point  $P$  quelconque de l'espace et rechercher si un plan de symétrie de la distribution passerait par ce point. Si tel est le cas, le champ magnétostatique est perpendiculaire au plan vectoriel directeur de ce plan affine de symétrie : ceci fixe la direction du champ magnétostatique en ce point  $P$ .

Rechercher les invariances par translations et/ou rotation : la composante restante du champ magnétostatique ne dépend pas des coordonnées le long des directions d'invariance par translation ni des angles de rotation.

②

Équations de Maxwell  
en régime indépendant du temps

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}(\vec{r})$$

$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$  (en tesla T) ;

$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r})$  : densité volumique de courant électrique source du champ magnétostatique ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

②

Équation intégrale  
et flux du champ magnétostatique

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} \, d\tau = 0 = \iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$  ;

$\Sigma$  : surface fermée.

La nullité du flux du champ magnétostatique traduit l'inexistence de charges magnétiques. Le flux du champ magnétostatique à travers une surface ouverte  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur un contour fermé  $\Gamma$  est indépendant de la surface  $\mathcal{S}$  mais ne dépend que du contour choisi.

②

Circulation du champ magnétostatique  
théorème d'Ampère

$$\int_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{ent} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathbf{j}}(\vec{r}) \cdot d\vec{\mathbf{S}}$$

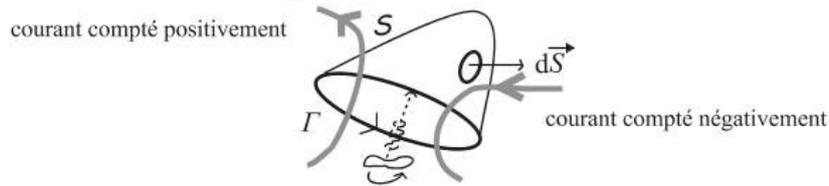
$\vec{B}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$  appartenant au contour ;  
 $\Gamma$  : contour fermé ;

$\vec{j}(\vec{r})$  : densité volumique de courant électrique source du champ magnétostatique ;

$I_{enl}$  : courant enlacé par le contour, c'est-à-dire traversant une surface s'appuyant sur lui ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide.

Orientations du contour d'Ampère, de la surface et des courants électriques



**2 Champ magnétostatique du fil rectiligne infini**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 \frac{j_0 r}{2} \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq R \\ \mu_0 \frac{j_0 R^2}{2r} \vec{e}_\theta & \text{si } r > R \end{cases}$$

$\vec{B}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$  du fil ;

$j_0$  : projection de la densité volumique de courant suivant sur  $\vec{e}_z$ , l'axe du cylindre, constante à l'intérieur de celui-ci ;

$R$  : rayon du cylindre (en m) ;

$r$  : distance du point  $\vec{r}$  à l'axe du cylindre (en m) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide.

**2 PSI Champ magnétostatique du solénoïde infini**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \vec{e}_z & \text{si } r < R \\ \vec{0} & \text{si } r > R \end{cases}$$

$\vec{B}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$  du solénoïde ;

$I$  : intensité du courant électrique circulant dans le solénoïde ;

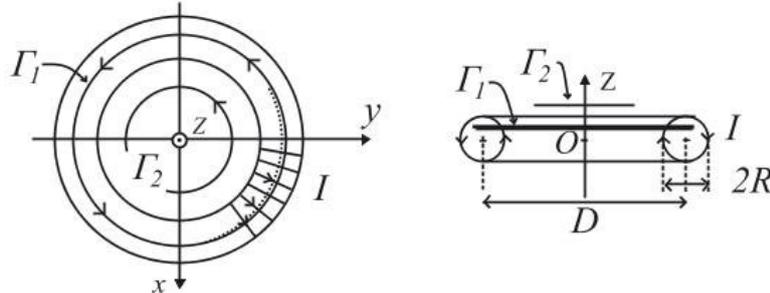
$n$  : nombre de spires par unité de longueur (en  $m^{-1}$ ) ;

$R$  : rayon du solénoïde (en m) ;

$r$  : distance du point  $\vec{r}$  à l'axe du solénoïde (en m) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide.

## ② Champ magnétostatique de la bobine torique



$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = B_{\theta}(r, z) \vec{\mathbf{e}}_{\theta} \quad \text{où} \quad B_{\theta}(r, z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} & \text{si } \left(r - \frac{D}{2}\right)^2 + z^2 < R^2 \\ 0 & \text{si } \left(r - \frac{D}{2}\right)^2 + z^2 > R^2 \end{cases}$$

$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$  du solénoïde ;

$I$  : intensité du courant électrique circulant dans le solénoïde ;

$N$  : nombre de spires (sans dimension) ;

$R$  : rayon d'une section droite du tore (en m) ;

$r$  : distance du point  $\vec{r}$  à l'axe du tore (en m) ;

$D$  : diamètre moyen du tore (en m) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

## 8.12 Dipôles magnétiques

### ② Moment magnétique

$$\vec{\mathbf{m}} = i S \vec{\mathbf{n}}$$

$\vec{\mathbf{m}}$  : moment magnétique d'une boucle plane (en  $\text{A.m}^2$ ) ;

$i$  : intensité du courant électrique parcourant la boucle (en A) ;

$S$  : aire de la boucle (en  $\text{m}^2$ ) ;

$\vec{\mathbf{n}}$  : normale au plan de la boucle, orientée à partir de l'orientation du courant électrique dans la boucle.

Extension aux bobines plates et aux solénoïdes à  $N$  spires identiques :

$\vec{\mathbf{m}} = N i S \vec{\mathbf{n}}$ , et aux morceaux de matière aimantée.

$$\vec{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \iiint \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{j}}(\vec{r}) d\tau$$

$\vec{\mathbf{m}}$  : moment magnétique d'une distribution volumique de courant électrique ;

$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r})$  : densité volumique de courant électrique en  $\vec{r}$  (en  $\text{A.m}^{-2}$ ).

**2 Champ magnétique du dipôle magnétique**

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$$

$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r})$  : champ magnétostatique en  $\vec{r}$ , loin de la distribution de courants ;  
 $\vec{m}$  : moment magnétique de la distribution des courants ;  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide.

En coordonnées sphériques :

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$(r, \theta, \varphi)$  : coordonnées du point  $\vec{r}$  ;  
 $m = \|\vec{m}\|$  ;  $\vec{m}$  colinéaire et de même sens que  $z'z$ .

**2 Actions sur un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur**

$$\delta W_L = i d\Phi$$

$\delta W_L$  : travail élémentaire des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit filiforme indéformable (en J) ;  
 $i$  : intensité du courant parcourant le circuit ;  
 $d\Phi$  : variation du flux du champ magnétostatique à travers le circuit pendant son déplacement (en Wb).

$$\mathcal{E}_{pm} = -I\Phi$$

$\mathcal{E}_{pm}$  : énergie potentielle d'un circuit filiforme indéformable parcouru par un courant constant dans un champ magnétostatique extérieur ;  
 $I$  : intensité constante du courant électrique dans le circuit indéformable ;  
 $\Phi$  : flux du champ magnétostatique à travers une surface s'appuyant sur le circuit, de normale orientée d'après la règle du tire-bouchon de Maxwell à partir de l'orientation du courant.

$$\mathcal{E}_{pm} = -\vec{m} \cdot \vec{\mathbf{B}}_e$$

$\mathcal{E}_{pm}$  : énergie potentielle d'un moment magnétique rigide dans un champ magnétostatique extérieur au dipôle magnétique ;  
 $\vec{\mathbf{B}}_e$  : champ magnétostatique extérieur à la boucle de courant ;

$\vec{m}$  : moment magnétique du dipôle magnétique rigide.

$$\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{pm} = (\vec{m} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}_e(\vec{r})$$

$\vec{f}_m$  : résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un dipôle le magnétique rigide ;

$\vec{m}$  : moment magnétique du dipôle magnétique rigide ;

$\vec{B}_e$  : champ magnétostatique extérieur au moment magnétique.

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$$

$\vec{M}$  : moment résultant des forces de Laplace s'exerçant sur un dipôle magnétique rigide ;

$\vec{m}$  : moment magnétique du dipôle magnétique rigide ;

$\vec{B}_e$  : champ magnétostatique extérieur au moment magnétique.

### 8.13 L'approximation des régimes quasi stationnaires

② PSI

#### Équations de Maxwell dans l'A.R.Q.S. magnétique

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{équation de Maxwell-Gauss}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{équation de Maxwell-Faraday}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{équation de Maxwell-flux}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{équation de Maxwell-Ampère}$$

$\vec{E}$  : champ électrique dans le vide, au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;

$\vec{B}$  : champ magnétique dans le vide, au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en T) ;

$\rho$  : densité volumique de charge électrique (en  $\text{C.m}^{-3}$ ) ;

$\vec{j}$  : densité volumique de courants électriques (en  $\text{A.m}^{-2}$ ) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

## ② PSI Condition légitimant l'hypothèse de l'A.R.Q.S. dans un conducteur ohmique

$$f \ll 1,8 \times 10^{10} \gamma$$

$f$  : fréquence des grandeurs électriques sinusoïdales (en Hz) ;  
 $\gamma$  : conductivité ohmique du conducteur (en  $\text{S.m}^{-1}$ ).

## ② PSI Puissance dissipée par les courants de Foucault

$$P_{CF} = \pi \gamma h R^4 \frac{\omega^2 B_0^2}{16}$$

$P_{CF}$  : puissance dissipée par les courants de Foucault (en W) ;  
 $B_0$  : valeur maximale du champ magnétique sinusoïdal (en T) ;  
 $\omega$  : pulsation du champ magnétique sinusoïdal (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;  
 $R$  et  $h$  : rayon et hauteur du cylindre conducteur (en m) ;  
 $\gamma$  : conductivité ohmique du conducteur (en  $\text{S.m}^{-1}$ ) ;

## ② PSI Densité d'énergie magnétique

$$w_m(\vec{r}, t) = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$w_m(\vec{r}, t)$  : densité volumique d'énergie magnétique dans le vide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{J.m}^{-3}$ ) ;  
 $B$  : norme du champ magnétique dans le vide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en T) ;  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ .

## ② PSI Énergie magnétique de deux bobines couplées

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

$\mathcal{E}_m$  : énergie magnétique des bobines en interaction (en J) ;  
 $L_1$  et  $L_2$  : inductances propres des bobines (en H) ;  
 $i_1$  et  $i_2$  : intensités du courant électrique dans chaque bobine (en A) ;  
 $M$  : mutuelle inductance entre les deux bobines (en H).

Condition de couplage  $M^2 \leq L_1 L_2$

## 9. Milieux ferromagnétiques

### 9.1 Description

#### ② PSI Moment magnétique d'un morceau de matière aimantée

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{d\vec{m}}{d\tau}(\vec{r})$$

$\vec{M}(\vec{r})$  : aimantation au point  $\vec{r}$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$d\vec{m}$  : moment magnétique élémentaire (en  $\text{A.m}^2$ );

$d\tau$  : volume élémentaire autour du point  $\vec{r}$  (en  $\text{L}^3$ ).

#### ② PSI Estimation de la force entre deux aimants identiques

$$\frac{F}{s} \propto \mu_0 \frac{\vec{m}^2}{sl^4}$$

$F$  : force entre deux barreaux aimantés (en N);

$s$  : section des barreaux aimantés (en  $\text{m}^2$ );

$\vec{m}$  : moment magnétique des aimants (en  $\text{A.m}^2$ );

$l$  : longueur des barreaux (en m);

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

#### ② PSI Courants d'aimantation d'un matériau ferromagnétique

$$\vec{j}_m(\vec{r}) = \text{rot } \vec{M}(\vec{r})$$

$\vec{j}_m(\vec{r})$  : densité volumique de courants d'aimantation au point  $\vec{r}$  (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\vec{M}(\vec{r})$  : aimantation du ferromagnétique au point  $\vec{r}$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ ).

$$\vec{j}_{sm}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \wedge \vec{n}(\vec{r})$$

$\vec{j}_{sm}(\vec{r})$  : densité surfacique de courant d'aimantation au point  $\vec{r}$  de la surface du matériau (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\vec{M}(\vec{r})$  : aimantation du ferromagnétique au point  $\vec{r}$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\vec{n}(\vec{r})$  : normale orientée extérieurement au point  $\vec{r}$  de la surface du matériau.

## ② PSI

## Le vecteur excitation magnétique

$$\vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t)}{\mu_0} - \vec{\mathbf{M}}(\vec{r}, t)$$

$\vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t)$  : vecteur excitation magnétique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t)$  : champ magnétique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en T);

$\vec{\mathbf{M}}(\vec{r}, t)$  : aimantation du ferromagnétique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

## ② PSI

Équation de Maxwell-Ampère  
dans le cadre de l'A.R.Q.S.

$$\text{rot } \vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathbf{j}}(\vec{r}, t)$$

$\vec{\mathbf{H}}(\vec{r}, t)$  : vecteur excitation magnétique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r}, t)$  : densité volumique de courants libres (en  $\text{A.m}^{-2}$ ).

## ② PSI

## Propriétés des milieux ferromagnétiques doux

$$\vec{\mathbf{M}} = \chi_m \vec{\mathbf{H}}$$

$\vec{\mathbf{M}}$  : aimantation du ferromagnétique (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{H}}$  : excitation magnétique (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\chi_m$  : susceptibilité magnétique du ferromagnétique doux (sans dimension).

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{\mathbf{H}}$$

$\vec{\mathbf{B}}$  : champ magnétique (en T);

$\vec{\mathbf{H}}$  : excitation magnétique (en  $\text{A.m}^{-1}$ );

$\chi_m$  : susceptibilité magnétique du ferromagnétique doux (sans dimension)

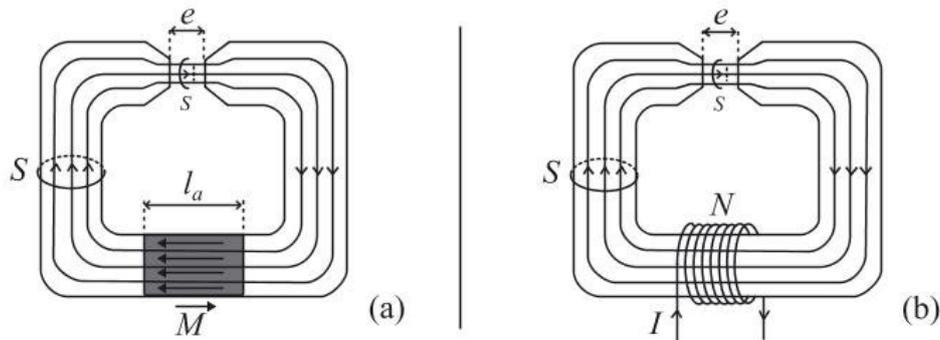
$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$\mu_r$  : perméabilité relative du matériau (sans dimension);

$\chi_m$  : susceptibilité magnétique du ferromagnétique doux (sans dimension).

## 9.2 Circuits magnétiques

### ② PSI Champ magnétique dans un circuit magnétique à aimant permanent avec entrefer



Circuit magnétique avec entrefer : (a) à aimant permanent ; (b) à électroaimant.

$$B_e = \mu_0 M \frac{S l_a}{s l_a + S e + \frac{s l}{\mu_r}}$$

$B_e$  : champ magnétique dans l'entrefer (en T) ;

$M$  : aimantation de l'aimant permanent (en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ ) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$  ;

$\mu_r$  : perméabilité relative du noyau ferromagnétique doux (sans dimension) ;

$S$  : section de l'aimant et du noyau ferromagnétique doux (en  $\text{m}^2$ ) ;

$s$  : section de l'entrefer (en  $\text{m}^2$ ) ;

$l_a$  : longueur de l'aimant (en m) ;

$l$  : longueur moyenne de la ligne d'excitation magnétique dans le noyau ferromagnétique doux (en m) ;

$e$  : épaisseur de l'entrefer (en m).

### ② PSI Champ magnétique dans un circuit magnétique avec entrefer à électroaimant

- Droite de charge

$$B_f = \mu_0 \frac{s N I}{S e} - \mu_0 \frac{l_f s}{e S} H_f$$

$B_f$  : champ magnétique dans le noyau ferromagnétique (en T) ;

$H_f$  : excitation magnétique dans le noyau ferromagnétique (en  $A.m^{-1}$ );

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$  ;

$S$  : section de l'aimant et du noyau ferromagnétique doux (en  $m^2$ );

$s$  : section de l'entrefer (en  $m^2$ );

$N$  : nombre de spires de la bobine (sans dimension);

$I$  : intensité du courant électrique dans la bobine (en A);

$l_f$  : longueur moyenne de la ligne d'excitation magnétique dans le noyau ferromagnétique doux (en m);

$e$  : épaisseur de l'entrefer (en m).

- Champ magnétique dans l'entrefer

$$B_f S = B_e s$$

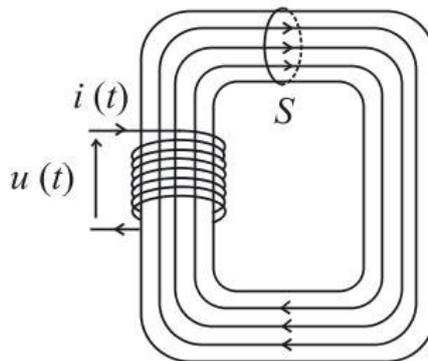
$B_f$  : champ magnétique dans le noyau ferromagnétique (en T);

$B_e$  : champ magnétique dans l'entrefer (en T);

$S$  : section du noyau ferromagnétique doux (en  $m^2$ );

$s$  : section de l'entrefer (en  $m^2$ ).

### 2 PSI      Circuit magnétique sans entrefer bobine à noyau de fer



Inductance de la bobine à noyau de fer

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{S N^2}{l}$$

$L$  : inductance propre d'une bobine à noyau de fer (en H);

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$  ;

$\mu_r$  : perméabilité relative du noyau ferromagnétique (sans dimension);

$S$  : section du noyau ferromagnétique doux (en  $m^2$ );

$N$  : nombre de spires de la bobine (sans dimension);

$l$  : longueur moyenne de la ligne d'excitation magnétique dans le noyau ferromagnétique doux (en m).

## ② PSI Énergie magnétique emmagasinée

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$$

$w_m$  : densité volumique d'énergie magnétique dans le milieu ferromagnétique au point  $\vec{r}$  (en  $\text{J.m}^{-3}$ );

$B$  : norme du champ magnétique dans le milieu ferromagnétique au point  $\vec{r}$  (en T);

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  ;

$\mu_r$  : perméabilité relative du noyau ferromagnétique (sans dimension).

## ② PSI Pertes par hystérésis dans une bobine réelle

$$P_H = \mathcal{A} V f$$

$P_H$  : puissance dissipée par hystérésis dans le noyau ferromagnétique (en W);

$\mathcal{A}$  : aire du cycle d'hystérésis du matériau dans le plan  $(B, H)$  (en  $\text{J.m}^{-3}$ );

$V$  : volume du noyau (en  $\text{m}^3$ );

$f$  : fréquence du champ magnétique alternatif dans le noyau (en Hz).

# 10. Ondes électromagnétiques

## 10.1 Les équations de propagation des champs

### ② Équations avec sources

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{j}}}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{\mathbf{B}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathbf{j}}$$

$\vec{\mathbf{E}}$  : champ électrique (en  $\text{V.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{B}}$  : champ magnétique (en T);

$\rho$  : densité volumique de charges électriques mobiles (en  $\text{C.m}^{-3}$ );

$\vec{\mathbf{j}}$  : densité volumique de courant électrique (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\varepsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

Équations de d'Alembert : prendre  $\vec{j} = \vec{0}$  et  $\rho = 0$  dans les deux équations précédentes.

## ② Définition de la célérité de la lumière

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$c$  : célérité de la lumière dans le vide ;  $299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$  ;  
 $\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  ;  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

## 10.2 Énergie du champ électromagnétique

### ② Puissance volumique cédée aux charges

$$p_j(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$p_j(\vec{r}, t)$  : densité volumique de puissance cédée aux charges au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{W.m}^{-3}$ ) ;

$\vec{j}(\vec{r}, t)$  : densité volumique de courant au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{A.m}^{-2}$ ) ;

$\vec{E}(\vec{r}, t)$  : champ électrique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ).

### ② Énergie volumique du champ électromagnétique

$$w_{em}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}$$

$w_{em}(\vec{r}, t)$  : densité volumique d'énergie électromagnétique (en  $\text{J.m}^{-3}$ ) ;

$\vec{E}(\vec{r}, t)$  : champ électrique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;

$\vec{B}(\vec{r}, t)$  : champ magnétique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en T) ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

### ② Vecteur de Poynting

$$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t) \wedge \vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t)}{\mu_0}$$

$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r}, t)$  : vecteur de Poynting au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$\vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$  : champ électrique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t)$  : champ magnétique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en T);

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

②

### Théorème de Poynting

$$\text{div} \left( \vec{\mathbf{R}}(\vec{r}, t) \right) + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}(\vec{r}, t) = -p_j(\vec{r}, t)$$

$\vec{\mathbf{R}}(\vec{r}, t)$  : vecteur de Poynting au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$w_{em}(\vec{r}, t)$  : densité volumique d'énergie électromagnétique (en  $\text{J.m}^{-3}$ );

$p_j(\vec{r}, t)$  : densité volumique de puissance cédée aux charges au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{W.m}^{-3}$ ).

## 10.3 Le champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants électriques

②

### Structure de l'onde électromagnétique plane progressive monochromatique

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{\mathbf{E}} \quad \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$\vec{\mathbf{B}}$  : champ magnétique de l'onde (en T);

$\vec{\mathbf{E}}$  : champ électrique de l'onde (en  $\text{V.m}^{-1}$ );

$\omega$  : pulsation de l'onde (en  $\text{rad.s}^{-1}$ );

$\vec{k}$  : vecteur d'onde (en  $\text{rad.m}^{-1}$ );

$c$  : célérité de la lumière dans le vide;  $299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ .

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

$v_\varphi$  : vitesse de phase de l'onde (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\omega$  : pulsation de l'onde (en  $\text{rad.s}^{-1}$ );

$k$  : norme du vecteur d'onde (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ).

## ② Les champs et les équations de Maxwell en notations complexes

- Notation complexe du champ électromagnétique

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- Les équations de Maxwell dans le vide sans charges ni courants

$$-j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}_0 = 0$$

$$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}_0 = -j\omega \underline{\vec{B}}_0$$

$$-j\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}}_0 = 0$$

$$-j\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}_0 = j\frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}_0$$

### 10.4 Propagation du champ électromagnétique dans un plasma

## ② Mouvements des charges

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)$$

$$M_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_i \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)$$

$\vec{v}_e, m_e$  : vitesse et masse d'un électron (en  $\text{m.s}^{-1}$  et kg);

$\vec{v}_i, M_i$  : vitesse et masse d'un ion positif (en  $\text{m.s}^{-1}$  et kg);

$e$  : charge élémentaire;  $1,60 \times 10^{-19}$  C;

$q_i$  : charge moyenne d'un ion positif (en C);

$\underline{\vec{E}}$  : champ électrique au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ ).

## ② Neutralité du plasma

$$n_e e = n_i q_i$$

$n_e, n_i$  : concentrations en électrons et en ions positifs (en  $\text{m}^{-3}$ );

$e$  : charge élémentaire;  $1,60 \times 10^{-19}$  C;

$q_i$  : charge moyenne d'un ion positif (en C).

## ② Définition de la densité volumique de courant électrique

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = n_i q_i \vec{v}_i(\vec{r}, t) - n_e e \vec{v}_e(\vec{r}, t) = n_e e (\vec{v}_i(\vec{r}, t) - \vec{v}_e(\vec{r}, t))$$

- $\vec{j}$  : densité volumique de courant électrique (en  $\text{A.m}^{-2}$ );  
 $n_e, n_i$  : concentrations en électrons et en ions positifs (en  $\text{m}^{-3}$ );  
 $\vec{v}_e$  : vitesse d'un électron ( $\text{m.s}^{-1}$ );  
 $\vec{v}_i$  : vitesse d'un ion positif (en  $\text{m.s}^{-1}$ );  
 $e$  : charge élémentaire ;  $1,60 \times 10^{-19}$  C ;  
 $q_i$  : charge moyenne d'un ion positif (en C).

## ② Densité volumique de courant électrique en régime harmonique

$$\underline{\vec{j}}(\vec{r}, t) = \frac{n_e e}{j\omega} \left( \frac{q_i}{m_i} + \frac{e}{m_e} \right) \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)$$

- $\underline{\vec{j}}$  : densité volumique de courant électrique en régime harmonique (en  $\text{A.m}^{-2}$ );  
 $n_e$  : concentration en électrons (en  $\text{m}^{-3}$ );  
 $e$  : charge élémentaire ;  $1,60 \times 10^{-19}$  C ;  
 $q_i$  : charge moyenne d'un ion positif (en C);  
 $m_e$  : masse d'un électron ;  $9,1 \times 10^{-31}$  kg ;  
 $M_i$  : masse d'un ion positif (en kg);  
 $\underline{\vec{E}}$  : champ électrique complexe au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  (en  $\text{V.m}^{-1}$ );  
 $\omega$  : pulsation du champ électrique (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

## ② Conductivité complexe approchée

$$\gamma = \frac{n_e e^2}{j m_e \omega}$$

- $\gamma$  : conductivité du plasma (en  $\text{S.m}^{-1}$ );  
 $n_e$  : concentration en électrons (en  $\text{m}^{-3}$ );  
 $e$  : charge élémentaire ;  $1,60 \times 10^{-19}$  C ;  
 $m_e$  : masse d'un électron ;  $9,1 \times 10^{-31}$  kg ;  
 $\omega$  : pulsation du champ électrique (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

## 10.5 Champ électromagnétique dans le plasma

### 2 Notations complexes du champ électromagnétique

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}$  : champs électrique et magnétique de l'onde (en  $\text{V.m}^{-1}$  et T) ;

$\omega$  : pulsation des champs (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$k$  : constante de propagation des champs (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ).

### 2 Relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$$

$k$  : constante de propagation des champs (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ) ;

$\omega$  : pulsation des champs (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$c$  : célérité de la lumière dans le vide ;  $299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$  ;

$\omega_p$  : pulsation de plasma (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$n_e$  : concentration en électrons (en  $\text{m}^{-3}$ ) ;

$e$  : charge élémentaire ;  $1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$  ;

$m_e$  : masse d'un électron ;  $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  ;

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ;  $8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

### 2 Vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

soit

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$v_\varphi$  : vitesse de phase (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;

$\omega$  : pulsation des champs (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$k$  : constante de propagation des champs (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ) ;

$c$  : célérité de la lumière dans le vide ;  $299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$  ;

$\omega_p$  : pulsation de plasma (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

②

## Vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

soit

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$v_g$  : vitesse de groupe (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\omega$  : pulsation des champs (en  $\text{rad.s}^{-1}$ );

$k$  : constante de propagation des champs (en  $\text{rad.m}^{-1}$ );

$c$  : célérité de la lumière dans le vide ;  $299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$  ;

$\omega_p$  : pulsation de plasma (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

②

## Vitesse de propagation de l'énergie

$$v_e = \frac{\|\vec{\mathbf{R}}(\vec{r}, t)\|}{w_{em}(\vec{r}, t)}$$

soit

$$v_e = v_g \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)^{-1}$$

$v_e$  : vitesse de propagation de l'énergie (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{R}}$  : vecteur de Poynting de l'onde plane progressive monochromatique (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$w_{em}$  : densité volumique d'énergie électromagnétique de l'O.P.P.M. (en  $\text{J.m}^{-3}$ );

$v_g$  : vitesse de groupe (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\omega$  : pulsation des champs (en  $\text{rad.s}^{-1}$ );

$\omega_p$  : pulsation de plasma (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

## 10.6 Propagation du champ électromagnétique en présence d'un milieu conducteur ohmique

②

## Milieu conducteur ohmique

$$\vec{\mathbf{j}}(\vec{r}, t) = \gamma \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$$

$\vec{\mathbf{j}}$  : densité volumique de courants électriques (en  $\text{A.m}^{-2}$ );

$\gamma$  : conductivité ohmique (réelle positive) (en  $\text{S.m}^{-1}$ );

$\vec{\mathbf{E}}$  : champ électrique (en  $\text{V.m}^{-1}$ ).

**2 Les équations de diffusion du champ électromagnétique**

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\vec{E}, \vec{B}$  : champ électromagnétique de l'onde (en  $V.m^{-1}$  et T) ;  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} H.m^{-7}$  ;  
 $\gamma$  : conductivité ohmique (en  $S.m^{-1}$ ).

**2 Effet de peau**

- Relation de dispersion du conducteur ohmique

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$k^2 = -j\mu_0\gamma\omega$$

$\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}$  : champ électromagnétique dans le conducteur (en  $V.m^{-1}$  et T) ;  
 $k$  : constante de propagation (en  $rad.m^{-1}$ ) ;  
 $\omega$  : pulsation du champ électromagnétique (en  $rad.s^{-1}$ ) ;  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$  ;  
 $\gamma$  : conductivité ohmique (en  $S.m^{-1}$ ).

- Constante de propagation et épaisseur de peau

$$k = \pm \frac{1-j}{\delta} \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

$k$  : constante de propagation (en  $rad.m^{-1}$ ) ;  
 $\delta$  : épaisseur de peau (en m) ;  
 $\omega$  : pulsation du champ électromagnétique (en  $rad.s^{-1}$ ) ;  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} H.m^{-1}$  ;  
 $\gamma$  : conductivité ohmique (en  $S.m^{-1}$ ).

- Champ électromagnétique de polarisation rectiligne dans le métal

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{e}_y \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4})} \vec{e}_z$$

$\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}$  : champ électromagnétique dans le conducteur (en  $V.m^{-1}$  et T) ;

$\underline{E}_0$  : amplitude complexe du champ électrique (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;  
 $\delta$  : épaisseur de peau (en m) ;  
 $\omega$  : pulsation du champ électromagnétique (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

## ② Réflexion d'un champ électromagnétique sur un conducteur parfait

- Relations de passage

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) - \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{\sigma(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}(\vec{r})$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) - \vec{B}_1(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}_s(\vec{r}, t) \wedge \vec{n}_{12}(\vec{r})$$

$\vec{r}$  : point de la surface de séparation entre deux milieux ;

$\vec{E}_1, \vec{B}_1$  : champ électromagnétique à la frontière dans le milieu (1) (en  $\text{V.m}^{-1}$  et T) ;

$\vec{E}_2, \vec{B}_2$  : champ électromagnétique à la frontière dans le milieu (2) (en  $\text{V.m}^{-1}$  et T) ;

$\vec{n}_{12}(\vec{r})$  : normale à la surface de séparation des milieux, au point  $\vec{r}$ , orienté du milieu (1) vers le milieu (2) (sans dimension) ;

$\sigma(\vec{r}, t)$  : densité surfacique de charge électrique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{C.m}^{-2}$ ) ;

$\vec{j}_s(\vec{r}, t)$  : densité surfacique de courant électrique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{A.m}^{-1}$ ) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

- Champ électromagnétique stationnaire

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_{i0} e^{j(\omega t + kx)} - \underline{\vec{E}}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} = 2j \underline{\vec{E}}_{i0} \sin(kx) e^{j\omega t}$$

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{i0} e^{j(\omega t + kx)} - \frac{1}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{i0} e^{j(\omega t - kx)}$$

$$= -\frac{2}{c} \vec{e}_x \wedge \underline{\vec{E}}_{i0} \cos(kx) e^{j\omega t}$$

$\vec{E}, \vec{B}$  : champ électromagnétique dans le vide ( $x > 0$ ) (en  $\text{V.m}^{-1}$  et T) ;

$\underline{\vec{E}}_{i0}$  : amplitude complexe du champ électrique de l'onde incidente (en  $\text{V.m}^{-1}$ ) ;

$k$  : constante de propagation dans le vide (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ) ;

$\omega$  : pulsation du champ électromagnétique (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

**2 Champ E.M. entre deux plans parallèles parfaitement conducteurs**

Relation de dispersion

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_y^2 + k_z^2 + p^2 \frac{\pi^2}{L^2}$$

$\omega$  : pulsation du champ électromagnétique (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;  
 $L$  : distance entre les plans parallèles, perpendiculaires à  $\vec{e}_x$  (en m) ;  
 $k_y, k_z$  : constantes de propagation selon  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ) ;  
 $p$  : entier naturel (sans dimension).

## 11. Ondes mécaniques

### 11.1 Ondes sur une corde

**2 PSI Équation d'onde à une dimension**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad \text{où} \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu_l}}$$

$y$  : déplacement du point d'abscisse  $x$  de la corde par rapport à l'équilibre, à l'instant  $t$  (en m) ;  
 $v$  : célérité des ébranlement sur la corde (en  $\text{m.s}^{-1}$ ) ;  
 $\mu_l$  : masse linéique de la corde (en  $\text{kg.m}^{-1}$ ) ;  
 $T$  : tension de la corde, supposée constante (en N).

**2 PSI Densité linéique d'énergie mécanique**

$$w_m(x, t) = \frac{1}{2} \mu_l \left( \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right)^2$$

$w_m$  : densité linéique d'énergie mécanique de la corde au point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{J.m}^{-1}$ ) ;  
 $y$  : déplacement du point d'abscisse  $x$  de la corde par rapport à l'équilibre, à l'instant  $t$  (en m) ;  
 $\mu_l$  : masse linéique de la corde (en  $\text{kg.m}^{-1}$ ) ;  
 $T$  : tension de la corde (en N).

## ② PSI

## Puissance mécanique

$$R(x, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$$

$R$  : puissance mécanique traversant le plan d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ , vers les  $x$  croissants (en W) ;

$y$  : déplacement du point d'abscisse  $x$  de la corde par rapport à l'équilibre, à l'instant  $t$  (en m) ;

$T$  : tension de la corde (en N).

## ② PSI

## Conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{\partial R}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial w_m}{\partial t}(x, t) = 0$$

$R$  : puissance mécanique traversant le plan d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ , vers les  $x$  croissants (en W) ;

$w_m$  : densité linéique d'énergie mécanique de la corde au point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{J.m}^{-1}$ ).

## 11.2 Ondes acoustiques

## ② PSI

## Équations linéarisées

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + \tilde{p}(\vec{r}, t)$$

$$; \quad \mu(\vec{r}, t) = \mu_0 + \tilde{\mu}(\vec{r}, t)$$

$$\tilde{\mu}(\vec{r}, t) = \mu_0 \chi_S \tilde{p}(\vec{r}, t)$$

évolution isentropique du fluide

$$\mu_0 \operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial t}(\vec{r}, t) = 0$$

conservation de la masse

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{r}, t) = -\vec{\operatorname{grad}} \tilde{p}$$

équation d'Euler du fluide

$p$  : pression dans le fluide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en Pa) ;

$p_0$  : pression du fluide au repos (en Pa) ;

$\tilde{p}$  : surpression à l'instant  $t$ , au point  $\vec{r}$  dans le fluide (en Pa) ;

$\mu$  : masse volumique dans le fluide au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;

$\mu_0$  : masse volumique du fluide au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ) ;

$\tilde{\mu}$  : écart de la masse volumique à l'instant  $t$ , au point  $\vec{r}$  dans le fluide, par

rapport à la masse volumique au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\vec{v}$  : champ des vitesses dans le fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\chi_S$  : coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé uniforme (en  $\text{Pa}^{-1}$ ).

## ② PSI Équation de propagation de la surpression

$$\Delta \tilde{p}(\vec{r}, t) - \mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 \tilde{p}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

$\tilde{p}$  : surpression à l'instant  $t$ , au point  $\vec{r}$  dans le fluide (en Pa);

$\mu_0$  : masse volumique du fluide au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\chi_S$  : coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé uniforme (en  $\text{Pa}^{-1}$ ).

## ② PSI Célérité de propagation du son

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_S}}$$

$c$  : célérité de propagation des ondes sonores dans le fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\mu_0$  : masse volumique du fluide au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\chi_S$  : coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé uniforme (en  $\text{Pa}^{-1}$ ).

## ② PSI Densité volumique d'énergie acoustique

$$w_a(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \chi_S \tilde{p}^2(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}^2(\vec{r}, t) + \frac{\tilde{p}^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0 c^2}$$

$w_a$  : densité volumique d'énergie acoustique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{J.m}^{-3}$ );

$\mu_0$  : masse volumique du fluide au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );

$\vec{v}$  : champ des vitesses dans le fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\tilde{p}$  : surpression à l'instant  $t$ , au point  $\vec{r}$  dans le fluide (en Pa);

$\chi_S$  : coefficient de compressibilité isentropique du fluide, supposé uniforme (en  $\text{Pa}^{-1}$ );

$c$  : célérité de propagation des ondes sonores dans le fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ );

$\mu_0$  : masse volumique du fluide au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ ).

### ② PSI Densité de flux de puissance acoustique

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \tilde{p}(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$\vec{\Pi}$  : densité de flux de puissance acoustique (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$\tilde{p}$  : surpression à l'instant  $t$ , au point  $\vec{r}$  dans le fluide (en Pa);

$\vec{v}$  : champ des vitesses dans le fluide (en  $\text{m.s}^{-1}$ ).

### ② PSI Conservation de l'énergie acoustique

$$\text{div } \vec{\Pi}(\vec{r}, t) + \frac{\partial w_a}{\partial t}(\vec{r}, t) = 0$$

$\vec{\Pi}$  : densité de flux de puissance acoustique (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$w_a$  : densité volumique d'énergie acoustique au point  $\vec{r}$ , à l'instant  $t$  (en  $\text{J.m}^{-3}$ ).

### ② PSI Intensité sonore

$$I(\vec{r}) = \left\| \langle \vec{\Pi}(\vec{r}, t) \rangle \right\|$$

$I$  : intensité sonore (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$\vec{\Pi}$  : densité de flux de puissance acoustique (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$\langle \rangle$  : valeur moyenne sur une période lorsque l'onde acoustique est sinusoïdale.

### ② PSI Niveau sonore

$$N_{dB} = 10 \log \left( \frac{I(\vec{r})}{I_0} \right)$$

$N_{dB}$  : niveau sonore (en dB);

$I$  : intensité sonore (en  $\text{W.m}^{-2}$ );

$I_0$  : intensité sonore de référence;  $10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ .

### ② PSI Impédance acoustique

$$Z_a = \rho_0 c$$

$Z_a$  : impédance acoustique (en  $\text{Pa.s.m}^{-1}$ );

$\mu_0$  : masse volumique du fluide au repos (en  $\text{kg.m}^{-3}$ );  
 $c$  : célérité de propagation des ondes sonores dans le fluide ; (en  $\text{m.s}^{-1}$ ).

**② PSI Coefficients de réflexion et de transmission**

$$r_p = \frac{Z_{a1} - Z_{a2}}{Z_{a1} + Z_{a2}} \quad \text{et} \quad t_p = \frac{2Z_{a2}}{Z_{a1} + Z_{a2}}$$

$$r_v = -r_p \quad \text{et} \quad t_v = \frac{2Z_{a1}}{Z_{a1} + Z_{a2}}$$

$$R = r^2 \quad \text{et} \quad T = 1 - R$$

$r_p, t_p$  : coefficients de réflexion et de transmission en pressions (sans dimension);  
 $r_v, t_v$  : coefficients de réflexion et de transmission en vitesses (sans dimension);  
 $Z_{a1}, Z_{a2}$  : impédances acoustiques des milieux d'incidence (1) et de transmission (2) (en  $\text{Pa.s.m}^{-1}$ );  
 $R, T$  : coefficients de réflexion et de transmission en intensités sonores (sans dimension).

## 12. Mécanique quantique

**① Relation de Planck-Einstein**

$$\Delta E = h \nu = h \frac{c}{\lambda}$$

$\Delta E$  : variation d'énergie (en J);  
 $h$  : constante de Planck (en J.s);  
 $c$  : célérité de la lumière (en  $\text{m.s}^{-1}$ );  
 $\lambda$  : longueur d'onde (en m);  
 $\nu$  : fréquence (en Hz).

**① Relation de De Broglie**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$\lambda$  : longueur d'onde (en m);  
 $h$  : constante de Planck (en J.s);  
 $p$  : quantité de mouvement (en  $\text{kg.m.s}^{-1}$ );  
 $m$  : masse (en kg);  
 $v$  : vitesse (en  $\text{m.s}^{-1}$ ).

## 1 Quantification de l'énergie pour un oscillateur harmonique quantique

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$E_n$  : énergie du niveau  $n \geq 0$  (J) ;  
 $\hbar$  : constante de Planck réduite (en J.s) ;  
 $\omega$  : pulsation propre de l'oscillateur (en rad.s<sup>-1</sup>) ;  
 $n$  : nombre entier positif ou nul.

## 2 MP Équation de Schrödinger

- À trois dimensions

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

$\psi$  : fonction d'onde (m<sup>-3/2</sup>) ;  
 $m$  : masse de la particule (kg) ;  
 $\hbar$  : constante de Planck réduite ;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s ;  
 $V$  : fonction énergie potentielle dans laquelle est plongée la particule.

- À une dimension

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x, t) \psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)$$

$\psi$  : fonction d'onde (en m<sup>-1/2</sup>) ;  
 $m$  : masse de la particule (en kg) ;  
 $\hbar$  : constante de Planck réduite ;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s ;  
 $V$  : fonction énergie potentielle dans laquelle est plongée la particule.

## 2 MP Condition de normalisation de la fonction d'onde

- À trois dimensions

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{r}, t)|^2 d\tau = 1$$

$\psi$  : fonction d'onde (en m<sup>-3/2</sup>).

- À une dimension

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

$\psi$  : fonction d'onde (en  $m^{-\frac{1}{2}}$ ).

## ② MP Densité de probabilité de présence

- À trois dimensions

$$p(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$$

$p(\vec{r}, t)$  : densité de probabilité de présence de la particule au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  (en  $m^{-3}$ );

$\psi$  : fonction d'onde de l'état (en  $m^{-\frac{3}{2}}$ ).

- À une dimension

$$p(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

$p(x, t)$  : densité de probabilité de présence de la particule au point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  (en  $m^{-1}$ );

$\psi$  : fonction d'onde de l'état (en  $m^{-\frac{1}{2}}$ ).

## ② MP Densité de courant de probabilité

- À trois dimensions

$$\text{div } \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} (|\psi(\vec{r}, t)|^2) = 0 \quad \text{avec}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi(\vec{r}, t) \overrightarrow{\text{grad}} \psi^*(\vec{r}, t) - \psi^*(\vec{r}, t) \overrightarrow{\text{grad}} \psi(\vec{r}, t) \right)$$

$\psi$  : fonction d'onde de l'état (en  $m^{-\frac{3}{2}}$ );

$\vec{J}(\vec{r}, t)$  : densité de courant de probabilité (en  $m^{-2} \cdot s^{-1}$ );

$m$  : masse de la particule (en kg);

$\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s.

- À une dimension

$$\frac{\partial J_x}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} (|\psi(x, t)|^2) = 0 \quad \text{avec}$$

$$J_x(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi(x, t) \frac{\partial \psi^*}{\partial x}(x, t) - \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right)$$

$\psi$  : fonction d'onde de l'état (en  $\text{m}^{-\frac{1}{2}}$ );

$\vec{J}(\vec{r}, t)$  : densité de courant de probabilité (en  $\text{s}^{-1}$ );

$m$  : masse de la particule (en kg);

$\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s.

## ② MP Propriétés de la fonction d'onde

- La fonction d'onde d'une particule, plongée dans une fonction énergie potentielle n'ayant que des discontinuités de première espèce, doit être continue en tout point de l'espace ainsi que ses dérivées premières par rapport aux variables d'espace et de temps.

- À trois dimensions, ces propriétés doivent être vérifiées en tout point d'une surface de discontinuité de première espèce de la fonction énergie potentielle; à une dimension, aux points de discontinuité de première espèce.

## ② MP États stationnaires de la particule

- À trois dimensions

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) f(t) \quad \text{où} \quad f(t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad \text{et}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \iiint_{\mathbf{R}^3} |\varphi(\vec{r})|^2 d\tau = 1$$

$\psi$  : fonction d'onde d'un état stationnaire de la particule (en  $\text{m}^{-\frac{3}{2}}$ );

$f$  : partie temporelle de la fonction d'onde (sans dimension);

$\varphi$  : partie spatiale, normée, de la fonction d'onde (en  $\text{m}^{-\frac{3}{2}}$ );

$m$  : masse de la particule (en kg);

$\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s;

$E$  : énergie de l'état stationnaire de fonction d'onde  $\psi$  (en J);

$V$  : fonction énergie potentielle dans laquelle est plongée la particule.

- À une dimension

$$\psi(x, t) = \varphi(x) f(t) \quad \text{où} \quad f(t) = e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad \text{et}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbf{R}} |\varphi(x)|^2 dx = 1$$

- $\psi$  : fonction d'onde d'un état stationnaire de la particule (en  $\text{m}^{-\frac{1}{2}}$ );
- $f$  : partie temporelle de la fonction d'onde (sans dimension);
- $\varphi$  : partie spatiale, normée, de la fonction d'onde (en  $\text{m}^{-1/2}$ );
- $m$  : masse de la particule (en kg);
- $\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s;
- $E$  : énergie de l'état stationnaire de fonction d'onde  $\psi$  (en J);
- $V$  : fonction énergie potentielle dans laquelle est plongée la particule.

**② MP Particule libre :  $V = 0$**

- Solution stationnaire non normalisable de l'équation de Schrödinger à trois dimensions

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{E}{\hbar} t)} \quad \text{avec} \quad E = \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m}$$

$$\vec{J}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

- $\psi_{\vec{k}}$  : solution non normalisable de l'équation de Schrödinger (sans dimension);
- $\vec{J}_{\vec{k}}$  : vecteur densité de courant de probabilité associé à la solution  $\psi_{\vec{k}}$  (en  $\text{m.s}^{-1}$ );
- $m$  : masse de la particule (en kg);
- $\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s;
- $E$  : énergie de l'état stationnaire de fonction d'onde  $\psi$  (en J);
- $\vec{k}$  : vecteur d'onde (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ).

- Solution stationnaire non normalisable de l'équation de Schrödinger à une dimension

$$\psi_k(x, t) = e^{i(kx - \frac{E}{\hbar} t)} \quad \text{avec} \quad E = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$$J_k(x, t) = \frac{\hbar k}{m}$$

- $\psi_k$  : solution non normalisable de l'équation de Schrödinger (sans dimension);
- $J_k$  : vecteur densité de courant de probabilité associé à la solution  $\psi_{\vec{k}}$  (en

## 212 [3] Physique

$\text{m.s}^{-1}$ );

$m$  : masse de la particule (en kg);

$\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s;

$E$  : énergie de l'état stationnaire de fonction d'onde  $\psi$  (en J);

$\vec{k}$  : vecteur d'onde (en  $\text{rad.m}^{-1}$ ).

• Paquet d'ondes : solution normalisable décrivant une particule libre

$$\psi(\vec{r}, t) = \iiint_{\mathbf{R}^3} \underline{\psi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \frac{E}{\hbar} t)} d^3 \vec{k} \quad \text{avec} \quad E = \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m}$$

$\psi$  : fonction d'onde de la particule (en  $\text{m}^{-\frac{3}{2}}$ );

$\underline{\psi}$  : fonction de distribution du paquet sur les vecteurs d'onde (en  $\text{m}^{\frac{3}{2}}$ ).

② MP

### Effet tunnel

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \text{sh}^2(\kappa a)} \quad \text{où} \quad \hbar^2 \kappa^2 = 2m(V_0 - E)$$

$\mathcal{T}$  : probabilité de transmission (sans dimension);

$V_0$  : hauteur de la barrière de potentiel (en J);

$a$  : largeur de la barrière de potentiel (en m);

$E$  : énergie de la particule (en J);

$m$  : masse de la particule (en kg);

$\hbar$  : constante de Planck réduite;  $1,055 \times 10^{-34}$  J.s.

## 13. Éléments de physique statistique

### 13.1 Le facteur de Boltzmann

② MP

### Modèle de l'atmosphère isotherme

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$$

$p(z)$  : pression atmosphérique à l'altitude  $z$  (en Pa);

$p_0$  : pression atmosphérique à l'altitude  $z = 0$  (en Pa);

$M$  : masse molaire de l'air (en  $\text{kg.mol}^{-1}$ );

$g$  : accélération de la pesanteur (en  $\text{m.S}^{-2}$ );

$R$  : constante des gaz parfaits;  $8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ;

$T$  : température absolue de l'atmosphère (en K).

## ② MP

## Facteur de Boltzmann

$$e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

$E$  : énergie d'une particule (en J) ;

$k_B$  : constante de Boltzmann ;  $1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  ;

$T$  : température absolue (en K).

## ② MP Probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie

• Facteur  $\beta$ 

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$\beta$  : facteur  $\beta$  (en  $\text{J}^{-1}$ ) ;

$k_B$  : constante de Boltzmann ;  $1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  ;

$T$  : température absolue (en K).

## • Fonction de partition

$$Z(\beta) = \sum_m e^{-\beta E_m}$$

$Z$  : fonction de partition (sans dimension) ;

$E_m$  : énergie du niveau discret  $n$  (en J) ;

$\sum_n$  : somme sur tous les états possibles du système ;

$\beta$  : facteur  $\beta$  à la température absolue  $T$  (en  $\text{J}^{-1}$ ).

## • Probabilité d'occupation

$$p(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)}$$

$p(E_n)$  : probabilité pour le système d'être dans l'état d'énergie  $E_n$  (sans dimension) ;

$Z(\beta)$  : fonction de partition du système (sans dimension) ;

$E_n$  : énergie de l'état  $n$  (en J) ;

$\beta$  : facteur  $\beta$  à la température  $T$  (en  $\text{J}^{-1}$ ).

## 13.2 Statistique sur le système

② MP

## Énergie moyenne du système

$$\bar{E} = \sum_n p(E_n) E_n = - \frac{\partial \ln Z(\beta)}{\partial \beta}$$

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$p(E_n)$  : probabilité pour le système d'être dans l'état d'énergie  $E_n$  (sans dimension) ;

$E_n$  : énergie de l'état  $n$  (en J) ;

$Z$  : fonction de partition (sans dimension) ;

$\beta$  : facteur  $\beta$  à la température  $T$  (en  $J^{-1}$ ).

② MP

## Écart quadratique moyen énergétique

$$\Delta E = \sqrt{\overline{E^2} - \bar{E}^2} = \frac{\partial^2 \ln Z(\beta)}{\partial \beta^2}$$

$\Delta E$  : écart quadratique moyen énergétique (en J) ;

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$\overline{E^2}$  : carré moyen de l'énergie (espérance du carré de l'énergie) du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$Z$  : fonction de partition (sans dimension) ;

$\beta$  : facteur  $\beta$  à la température  $T$  (en  $J^{-1}$ ).

② MP

## Capacité thermique molaire du système

$$c_{vm} = N_A \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = R\beta^2 \Delta E$$

$c_{vm}$  : capacité thermique molaire à volume constant (en  $J.K^{-1}.mol^{-1}$ ) ;

$N_A$  : nombre d'Avogadro ;  $6,02 \times 10^{23} mol^{-1}$  ;

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$T$  : température absolue (en K) ;

$R$  : constante des gaz parfaits ;  $8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  ;

$\beta$  : facteur  $\beta$  du système à la température  $T$  (en  $\text{J}^{-1}$ ) ;

$\Delta E$  : écart quadratique moyen énergétique (en J).

### 13.3 Équipartition de l'énergie

#### ② MP Énergie moyenne par degré de liberté quadratique classique

$$\bar{E} = \frac{k_B T}{2}$$

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) d'un degré de liberté quadratique classique d'une entité du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$k_B$  : constante de Boltzmann ;  $1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  ;

$T$  : température absolue (en K).

#### ② MP Capacité thermique molaire du gaz parfait

$$u_m = d N_A \bar{E}$$

$u_m$  : énergie interne molaire d'un gaz parfait (en  $\text{J.mol}^{-1}$ ) ;

$d$  : nombre de degré de liberté d'une molécule du gaz (entier sans dimension) ;

$N_A$  : nombre d'Avogadro ;  $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) d'un degré de liberté quadratique classique d'une entité du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J).

$$c_{vm} = \frac{d}{2} R \quad ; \quad c_{pm} = \frac{d+2}{2} R \quad ; \quad \gamma = \frac{d+2}{d}$$

$c_{vm}$  : capacité thermique molaire à volume constant (en  $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ) ;

$c_{pm}$  : capacité thermique molaire à pression constante (en  $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ ) ;

$\gamma$  : rapport des capacités thermiques molaires (sans dimension) ;

$d$  : nombre de degré de liberté d'une molécule du gaz (entier sans dimension) ;

$R$  : constante des gaz parfaits ;  $8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

#### ② MP Capacité thermique molaire du solide Loi de Dulong et Petit

$$u_m = 6 N_A \bar{E} \quad ; \quad c_m = 3R$$

$u_m$  : énergie interne molaire d'un solide (en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) ;

$N_A$  : nombre d'Avogadro ;  $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) d'un degré de liberté quadratique classique d'une entité du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$c_m$  : capacité thermique molaire (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) ;

$R$  : constante des gaz parfaits ;  $8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## ② MP

### Modèle d'Einstein

$$\bar{E} = \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right)$$

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) d'un degré de liberté quadratique quantique d'une entité du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J) ;

$\hbar$  : constante de Planck réduite ;  $1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  ;

$\omega$  : pulsation propre de l'oscillateur quantique (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) ;

$\beta$  : facteur  $\beta$  à la température  $T$  (en  $\text{J}^{-1}$ ).

## ② MP

### Énergie interne molaire

$$u_m = 6 N_A \bar{E}$$

$u_m$  : énergie interne molaire d'un solide (en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) ;

$N_A$  : nombre d'Avogadro ;  $6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;

$\bar{E}$  : énergie moyenne (espérance de l'énergie) d'un degré de liberté quadratique quantique d'une entité du système en contact avec le thermostat de température  $T$  (en J).

## ② MP

### Capacité thermique molaire

$$c_m = 3R \hbar\omega \beta^2 \left( \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \right)$$

$c_m$  : capacité thermique molaire (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) ;

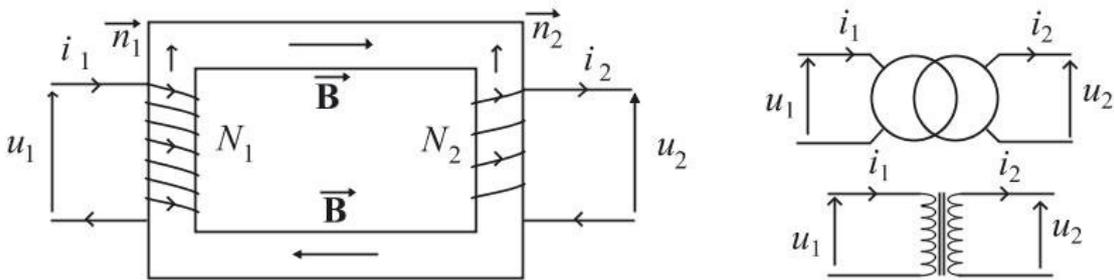
$R$  : constante des gaz parfaits ;  $8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;

$\hbar$  : constante de Planck réduite ;  $1,05 \times 10^{-34}$  J.s ;  
 $\omega$  : pulsation propre de l'oscillateur quantique (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;  
 $\beta$  : facteur  $\beta$  à la température  $T$  (en  $\text{J}^{-1}$ ).

## 14. Conversions de puissances

### 14.1 Conversion statique

**2 PSI**                      **Transformateur de tension**



- Relation entre les tensions

$$u_2(t) = \frac{N_2}{N_1} u_1(t) = m u_1(t)$$

$u_2(t)$  : tension électrique aux bornes du secondaire (en V) ;  
 $u_1(t)$  : tension électrique aux bornes du primaire (en V) ;  
 $N_1, N_2$  : nombres de spires des bobinages primaire et secondaire (sans dimension) ;  
 $m$  : rapport de transformation du transformateur (sans dimension).

- Relation de Kapp des transformateurs

$$U_{1eff} = \sqrt{2}\pi N_1 S f B_{max} \approx 4,44 N_1 S f B_{max}$$

$U_{1eff}$  : valeur efficace de la tension primaire (en V) ;  
 $N_1$  : nombre de spires du bobinage primaire (sans dimension) ;  
 $S$  : section du noyau de fer doux (en  $\text{m}^2$ ) ;  
 $f$  : fréquence de fonctionnement du transformateur (en Hz) ;  
 $B_{max}$  : valeur maximale du champ magnétique dans le noyau de fer doux (en T).

- Relation entre les intensités électriques

$$i_2(t) = \frac{N_1}{N_2} i_1(t) = \frac{1}{m} i_1(t)$$

$i_2(t)$  : intensité du courant électrique au secondaire (en A) ;

$i_1(t)$  : intensité du courant électrique au primaire (en A) ;

$N_1, N_2$  : nombres de spires des bobinages primaire et secondaire (sans dimension) ;

$m$  : rapport de transformation du transformateur (sans dimension).

- Impédance ramenée au primaire

$$Z_p = \frac{Z}{m^2}$$

$Z_p$  : impédance ramenée au primaire (en  $\Omega$ ) ;

$Z$  : impédance de charge du secondaire (en  $\Omega$ ) ;

$m$  : rapport de transformation du transformateur (sans dimension).

- Rendement du transformateur

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_f + P_c}$$

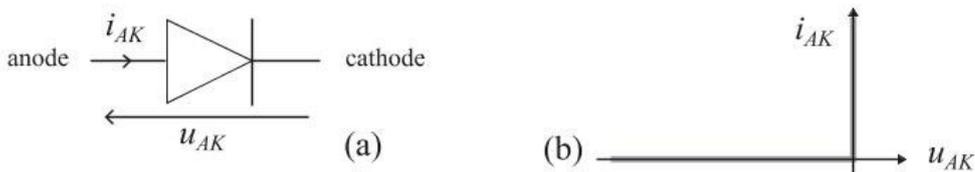
$\eta$  : rendement du transformateur (sans dimension) ;

$P_2$  : puissance active délivrée au secondaire (en W) ;

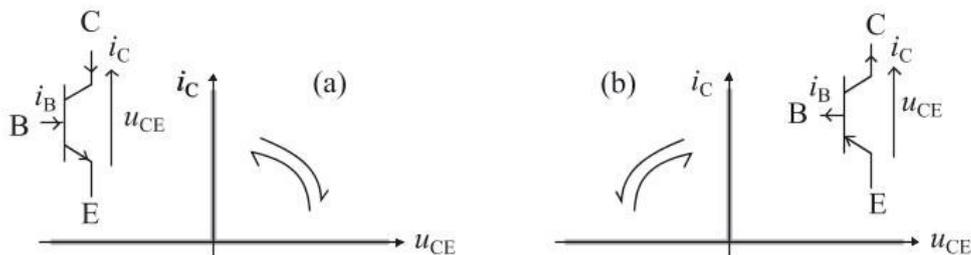
$P_f$  : pertes fer (en W) ;

$P_c$  : pertes cuivre (en W).

## ② PSI Les interrupteurs de puissance



Diode : symbole (a) ; caractéristique tension-courant (b)



Transistor bipolaire : symbole et caractéristique  $u_{CE}(i_C)$  du transistor de type NPN (a) ; de type PNP (b)

## ② PSI

### Le hacheur

- Valeur moyenne de la tension hachée

$$\langle u \rangle = \alpha U_0$$

$\langle u \rangle$  : valeur moyenne de la tension aux bornes de la charge (en V) ;  
 $\alpha$  : rapport cyclique (sans dimension) ;  
 $U_0$  : tension continue d'alimentation du hacheur (en V).

- Ondulation de l'intensité du courant dans la charge

$$\Delta I = \alpha T \frac{U_0 - E}{L}$$

$\Delta I$  : ondulation du courant dans le moteur à courant continu (en A) ;  
 $\alpha$  : rapport cyclique (sans dimension) ;  
 $T$  : période de fonctionnement du hacheur (en s) ;  
 $U_0$  : tension continue d'alimentation du hacheur (en V) ;  
 $E$  : force contre-électromotrice du moteur à courant continu (en V) ;  
 $L$  : valeur de l'inductance de lissage (en H).

## ② PSI

### Le redressement double alternance à pont de diodes

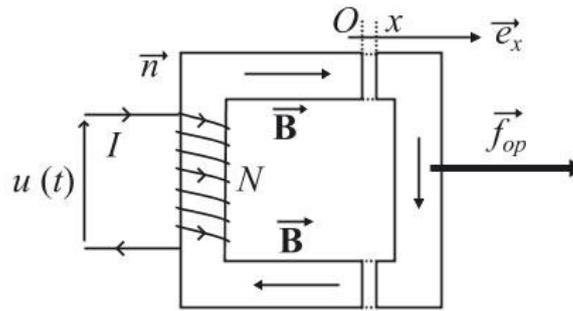
$$\langle u \rangle = \frac{2}{\pi} U_a$$

$\langle u \rangle$  : valeur moyenne de la tension redressée (en V) ;  
 $U_a$  : valeur maximale de la tension d'alimentation du pont redresseur (en V).

## 14.2 Conversion électro-mécanique

## ② PSI

### Le contacteur électromagnétique



- Champs magnétiques

$$B_f = B_e = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{2x \mu_r + l_f}$$

$B_f$  : champ magnétique dans le milieu ferromagnétique (en T) ;

$B_e$  : champ magnétique dans l'entrefer (en T) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  ;

$\mu_r$  : perméabilité relative du milieu ferromagnétique (sans dimension) ;

$N$  : nombre de spires de la bobine (sans dimension) ;

$I$  : intensité du courant électrique dans la bobine (en A) ;

$l_f$  : longueur moyenne de la ligne d'excitation magnétique dans le milieu ferromagnétique (en m) ;

$x$  : épaisseur de l'entrefer (en m).

- Énergie et force magnétiques

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mu_0 \mu_r S (N I)^2}{2(2x \mu_r + l_f)}$$

$\mathcal{E}_m$  : énergie magnétique totale du champ (en J) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  ;

$\mu_r$  : perméabilité relative du milieu ferromagnétique (sans dimension) ;

$S$  : section du noyau ferromagnétique (en  $\text{m}^2$ ) ;

$N$  : nombre de spires de la bobine (sans dimension) ;

$I$  : intensité du courant électrique dans la bobine (en A) ;

$l_f$  : longueur moyenne de la ligne d'excitation magnétique dans le milieu ferromagnétique (en m) ;

$x$  : épaisseur de l'entrefer (en m).

$$f_{mx} = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x}$$

$f_{mx}$  : composante suivant  $x$  de la force due au champ magnétique sur la pièce mobile (en N) ;

$\mathcal{E}_m$  : énergie magnétique totale du champ (en J).

## ② PSI

## La machine synchrone

- Champ magnétique rotorique

$$\vec{\mathbf{B}}_{r/\mathcal{R}ot}(\theta') = B_{r0} \cos(p_r \theta') \vec{\mathbf{e}}_{r'}$$

$\vec{\mathbf{B}}_{r/\mathcal{R}ot}(\theta')$  : champ magnétique rotorique dans le référentiel lié au rotor au point de coordonnée  $\theta'$  (en T) ;  
 $B_{r0}$  : valeur maximale du champ rotorique dans l'entrefer (en T) ;  
 $p_r$  : nombre de paires de pôles au rotor (sans dimension).

- Fonctionnement en alternateur synchrone

$$f_s = p_r f_r$$

$f_s$  : fréquence des tensions et courants électriques induits au stator (en Hz) ;  
 $p_r$  : nombre de paires de pôles au rotor (sans dimension) ;  
 $f_r$  : fréquence de rotation du rotor (en tr.s<sup>-1</sup>).

- Fonctionnement du moteur synchrone

$$\vec{\mathbf{B}}_{s/\mathcal{R}sta}(\theta, t) = B_{s0} \cos(\omega_s t - p_s \theta) \vec{\mathbf{e}}_r$$

$\vec{\mathbf{B}}_{s/\mathcal{R}sta}(\theta, t)$  : champ magnétique statorique au point de l'entrefer repéré par  $\theta$ , à l'instant  $t$  (en T) ;  
 $B_{s0}$  : valeur maximale du champ magnétique statorique (en T) ;  
 $p_s$  : nombre de paires de pôles au stator (sans dimension) ;  
 $\omega_s$  : pulsation des tensions d'alimentation du stator (en rad.s<sup>-1</sup>).

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_s}{p_s}$$

$\frac{d\theta}{dt}$  : vitesse angulaire du champ glissant statorique dans l'entrefer (en rad.s<sup>-1</sup>) ;  
 $p_s$  : nombre de paires de pôles au stator (sans dimension) ;  
 $\omega_s$  : pulsation des tensions d'alimentation du stator (en rad.s<sup>-1</sup>).

$$\vec{\mathbf{B}}_{r/\mathcal{R}sta}(\theta, t) = B_{r0} \cos(p_r \omega_r t - p_r \theta + p_r \varphi) \vec{\mathbf{e}}_r$$

$\vec{\mathbf{B}}_{r/\mathcal{R}sta}(\theta, t)$  : champ magnétique rotorique dans l'entrefer au point repéré par

$\theta$ , à l'instant  $t$  (en T) ;

$B_{r0}$  : valeur maximale du champ magnétique rotorique (en T) ;

$p_r$  : nombre de paires de pôles au rotor (sans dimension) ;

$\omega_r$  : vitesse angulaire du rotor (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$\varphi$  : angle entre les champs magnétiques rotoriques et statoriques (en rad).

- Condition de synchronisme

$$\omega_r = \frac{\omega_s}{p_r}$$

$\omega_r$  : vitesse angulaire du rotor (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$p_r$  : nombre de paires de pôles au rotor (sans dimension) ;

$\omega_s$  : pulsation des tensions d'alimentation du stator (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

- Moment moyen de couple

$$\langle \mathcal{M}_\Delta \rangle = -p_r \frac{B_{r0} B_{s0}}{\mu_0} \pi e R_r L \sin(p_r \varphi)$$

$\langle \mathcal{M}_\Delta \rangle$  : moment moyen du couple par rapport à l'axe (en N.m) ;

$\mu_0$  : perméabilité magnétique du vide ;  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  ;

$B_{s0}$  : valeur maximale du champ magnétique statorique (en T) ;

$B_{r0}$  : valeur maximale du champ magnétique rotorique (en T) ;

$p_r$  : nombre de paires de pôles au rotor (sans dimension) ;

$e$  : épaisseur de l'entrefer (en m) ;

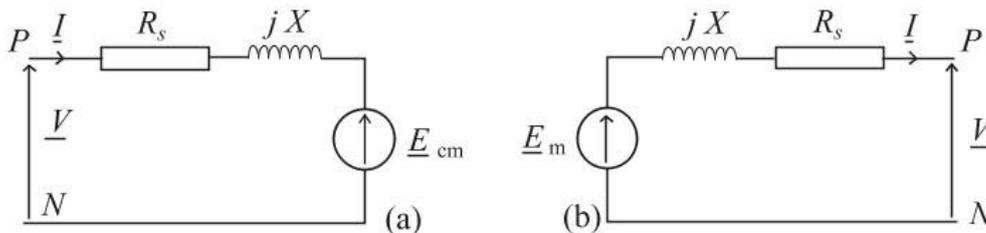
$R_r$  : rayon du rotor (en m) ;

$L$  : longueur de la partie active du rotor (en m) ;

$\varphi$  : angle entre les champs magnétiques rotoriques et statoriques (en rad).

REMARQUE : valable si la condition de synchronisme et  $p_s = p_r$  sont satisfaites.

- Modèle équivalent par phase de la machine synchrone : (a) en moteur ; (b) en alternateur



$R_s$  : résistance statorique (en  $\Omega$ ) ;

$jX$  : réactance synchrone (en  $\Omega$ ) ;

$V$  : tension d'alimentation phase-neutre en moteur ou tension phase-neutre délivrée au stator (en V) ;

$\underline{E}_{cem}$  : force contre-électromotrice en moteur (en V) ;

$\underline{E}_m$  : force électromotrice en générateur synchrone ; (en V) ;

$\underline{I}$  : intensité du courant électrique absorbé (en moteur) ou fourni ( en générateur) (en A).

## 2 PSI

### La machine à courant continu

- Moment du couple

$$\mathcal{M}_\Delta = k \Phi I$$

$\mathcal{M}_\Delta$  : moment du couple par rapport à l'axe de rotation (en N.m) ;

$k$  : constante caractéristique de la machine (en  $\text{rad}^{-1}$ ) ;

$\Phi$  : flux du champ magnétique sous un pôle (en Wb) ;

$I$  : intensité du courant électrique absorbé (en moteur) ou fourni (en générateur) (en A).

- Force électromotrice induite

$$E = k \Phi \Omega$$

$E$  : force (contre-) électromotrice induite (en V) ;

$k$  : constante caractéristique de la machine (en  $\text{rad}^{-1}$ ) ;

$\Phi$  : flux du champ magnétique sous un pôle (en Wb) ;

$\Omega$  : vitesse angulaire du rotor (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

- Puissance électromagnétique transmise au rotor

$$\mathcal{P}_{em} = \mathcal{M}_\Delta \Omega = E I$$

$\mathcal{P}_{em}$  : puissance électromagnétique transmise au rotor (en W) ;

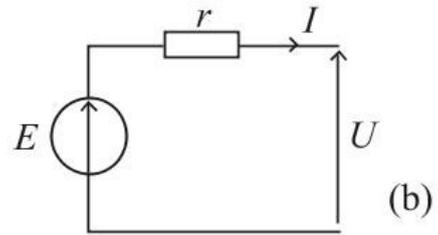
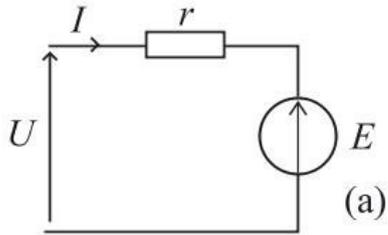
$\mathcal{M}_\Delta$  : moment du couple par rapport à l'axe de rotation (en N.m) ;

$I$  : intensité du courant électrique absorbé (en moteur) ou fourni (en générateur) (en A) ;

$E$  : force (contre-) électromotrice induite (en V) ;

$\Omega$  : vitesse angulaire du rotor (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

- Modèle équivalent de l'induit en fonctionnement moteur (a) ; en fonctionnement générateur (b)



En moteur :  $U = rI + k\Phi\Omega$ . En générateur  $U = k\Phi\Omega - rI$ .

# Chimie

## 1. Thermodynamique

### 1.1 États de la matière

#### 1 Les trois états de la matière

- État solide : état compact (état condensé) et relativement ordonné. Il possède un volume propre et une forme propre.
- État liquide : état compact (état condensé) mais désordonné. Il possède un volume propre mais est déformable (état fluide).
- État gazeux : état dispersé et désordonné. Il ne possède ni forme propre (état fluide), ni volume propre.

#### 1 Différents types de solides

- Solide cristallin : solide dont l'arrangement des atomes est ordonné et régulier.
- Solide amorphe : solide dont l'arrangement des atomes se fait de façon aléatoire (état désordonné).
- Solide semi-cristallin : solide possédant des domaines cristallins et amorphes en proportions variables.

#### 1 Variétés allotropiques

Certains corps simples ont la faculté d'exister sous plusieurs formes physiques, sans changement d'état physique (souvent : plusieurs formes cristallines) : les variétés allotropiques.

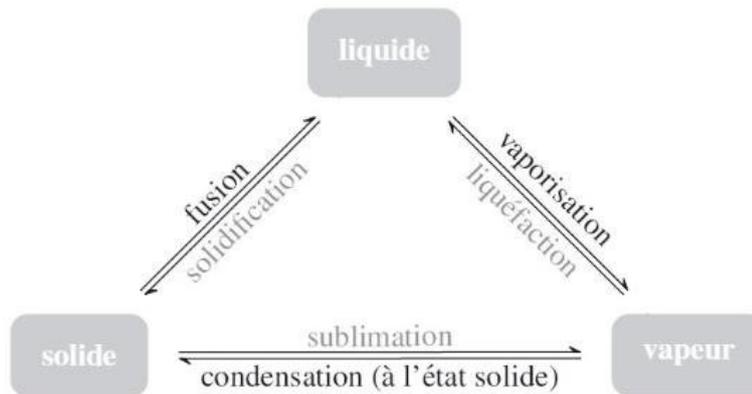
#### 1 Transformations de la matière

- Transformation physique : transformation durant laquelle un composé change d'état physique (changement d'état), de forme physique (transformation entre variétés allotropiques) ou subit une contrainte extérieure (pression, température).

- Transformation chimique : transformation durant laquelle des composés chimiques (les réactifs) sont transformés en de nouveaux composés chimiques (les produits), tout en conservant les différents éléments chimiques mis en jeu. Cette transformation fait intervenir les électrons des éléments.
- Transformation nucléaire : transformation durant laquelle des composés se transforment en de nouveaux composés avec modification de la structure nucléaire des atomes (les éléments chimiques ne sont donc pas conservés). Cette transformation fait intervenir les nucléons des éléments.

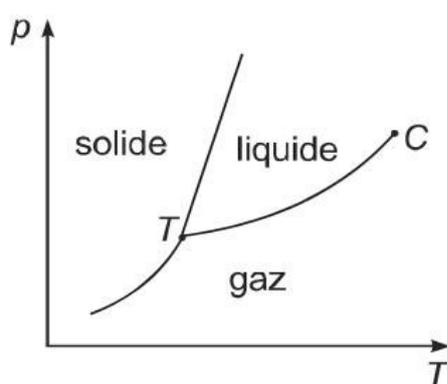
## 1

## Les différents changements d'état

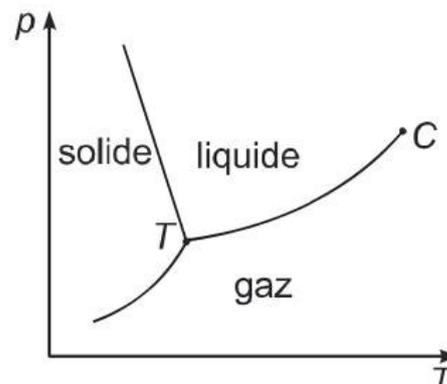


## 1

## Diagramme d'état



Cas général



Cas particulier (ex : eau)

$C$  : point critique (point au-delà duquel on ne fait plus la différence entre état liquide et état gazeux.)

$T$  : point triple (point où coexistent les trois états de la matière)

$p$  : pression

$T$  : température

## 1.2 Description d'un système physico-chimique

## ① Constituant et système physico-chimiques

Un constituant physico-chimique est une espèce chimique donnée dans un état physique donné.

Un système physico-chimique est constitué d'une ou plusieurs espèces physico-chimiques.

## ① Quantité de matière

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

$n$  : quantité de matière (mol)

$m$  : masse (g)

$M$  : masse molaire ( $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

$N$  : quantité particulaire ou moléculaire (sans dimension)

$N_A$  : nombre d'Avogadro

$$= 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

## ① Fraction molaire

$$x_i = \frac{n_i}{n_{\text{total}}} = \frac{n_i}{\sum_i n_i}$$

$$\sum_i x_i = 1$$

$x_i$  : fraction molaire de  $i$  (sans dimension)

$n_i$  : quantité de matière de  $i$  (mol)

$n_{\text{total}}$  : quantité de matière totale (mol)

## ① Fraction massique

$$w_i = \frac{m_i}{m_{\text{total}}} = \frac{m_i}{\sum_i m_i}$$

$$\sum_i w_i = 1$$

$w_i$  : fraction massique de  $i$  (sans dimension)

$m_i$  : masse de  $i$  (g)

$m_{\text{total}}$  : masse totale (g)

**1****Concentration molaire**

$$c_i = \frac{n_i}{V}$$

$c_i$  ou  $[i]$  : concentration molaire de  $i$   
(mol.L<sup>-1</sup>)

$n_i$  : quantité de matière de  $i$  (mol)

$V$  : volume de la solution (L)

**1****Concentration massique**

$$c_{m_i} = \frac{m_i}{V} = c_i M_i$$

$c_{m_i}$  : concentration massique de  $i$   
(g.L<sup>-1</sup>)

$m_i$  : masse de  $i$  (g)

$V$  : volume de la solution (L)

**1****Masse volumique**

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i}$$

$\rho_i$  : masse volumique de  $i$  (g.L<sup>-1</sup>)

$m_i$  : masse de  $i$  (g)

$V_i$  : volume de  $i$  (L)

**1****Densité d'un liquide ou d'un solide**

$$d_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{eau}}}$$

$d_i$  : densité de  $i$  (sans dimension)

$\rho_i$  : masse volumique de  $i$  (g.L<sup>-1</sup>)

$\rho_{\text{eau}}$  : masse volumique de l'eau  
(g.L<sup>-1</sup>)

**1****Densité d'un gaz**

$$d_i = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{air}}}$$

$d_i$  : densité de  $i$  (sans dimension)

$\rho_i$  : masse volumique de  $i$  (g.L<sup>-1</sup>)

$\rho_{\text{air}}$  : masse volumique de l'air  
(g.L<sup>-1</sup>)

### 1 Équation d'état du gaz parfait

$$pV = nRT$$

$p$  : pression du gaz (Pa)  
 $V$  : volume du gaz ( $\text{m}^3$ )  
 $n$  : quantité de matière (mol)  
 $R$  : constante des gaz parfaits  
 ( $8,314 \text{ Pa}\cdot\text{m}^3\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )  
 $T$  : température (K)

### 1 Pression partielle – Loi de Dalton

$$p_i = \frac{n_i RT}{V} = x_i p_T$$

$$p_T = \sum_i p_i$$

$p_i$  : pression partielle en  $i$  (Pa)  
 $n_i$  : quantité de matière de  $i$  (mol)  
 $x_i$  : fraction molaire de  $i$  (mol) (sans dimension)  
 $p_T$  : pression totale (Pa)

## 1.3 Étude thermodynamique d'une transformation

### 1 Avancement molaire – Quantité de matière en cours de réaction

$$\xi = \frac{n_i(t) - n_i(0)}{\nu_i}$$

$$n_i(t) = n_i(0) + \nu_i \xi$$

$\xi$  : avancement molaire (mol)  
 $n_i(0)$  et  $n_i(t)$  : quantités de matière de  $i$  à l'état initial et à l'instant  $t$  (mol)  
 $\nu_i$  : coefficient stœchiométrique algébrique de  $i$  ( $< 0$  pour les réactifs et  $> 0$  pour les produits) (sans dimension)

### 1 Avancement volumique

$$x = \frac{\xi}{V}$$

$x$  : avancement volumique ( $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ )  
 $\xi$  : avancement molaire (mol)  
 $V$  : volume total (L)

## 1 Activité (chimique)

L'activité chimique est sans dimension.

- Mélange idéal de gaz parfaits :  $a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$
- État condensé pur :  $a_i = 1$
- Mélange idéal de liquide :  $a_i = x_i$  (fraction molaire)
- Solution :  $a_{\text{solvant}} = 1$  et  $a_{\text{soluté}} = \frac{c_{\text{soluté}}}{C^\circ}$

$P^\circ = 1 \text{ bar}$  : pression standard

$C^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$  : concentration standard

## 1 Quotient de réaction et constante d'équilibre

$$Q_r = \prod_i (a_i)^{\nu_i}$$

Loi d'action des masses (LAM)  
ou loi de Guldberg et Waage :

$$K^\circ(T) = Q_{r_{\text{eq}}} = \prod_i (a_i)_{\text{eq}}^{\nu_i}$$

$Q_r$  : quotient de réaction (à un instant donné, sans dimension)

$a_i$  : activité de  $i$  (sans dimension)

$\nu_i$  : coefficient stœchiométrique algébrique (sans dimension)

$K^\circ(T)$  : constante d'équilibre (dépend de la température, sans dimension)

$(a_i)_{\text{eq}}$  : activité de  $i$  à l'équilibre (sans dimension)

## 1 Critère d'évolution

Lorsque tous les réactifs et produits de la réaction sont présents à l'état initial, le quotient de réaction tend à devenir égal à la constante d'équilibre.

Ainsi :

- la transformation évolue dans le sens direct lorsque  $Q_r(\text{EI}) < K^\circ$
- la transformation évolue dans le sens indirect lorsque  $Q_r(\text{EI}) > K^\circ$

(EI représente l'état initial)



## ① Relation entre constantes d'équilibre

Soit l'association de réactions suivante :

$$\text{réaction}(3) = n \text{ réaction}(1) + m \text{ réaction}(2) \quad K_3^\circ = (K_1^\circ)^n \times (K_2^\circ)^m$$

## 1.4 Diagrammes binaires solide-liquide

### ② PSI Solution idéale

Une solution est idéale si toutes les interactions entre espèces chimiques ( $A_i - A_i$  et  $A_i - A_j$ ) sont équivalentes.

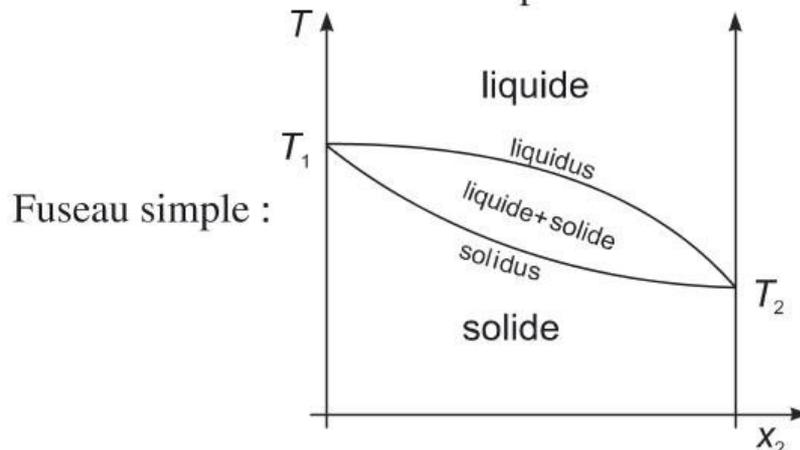
### ② PSI Variance – Règle de Gibbs

$$v = c + 2 - \varphi$$

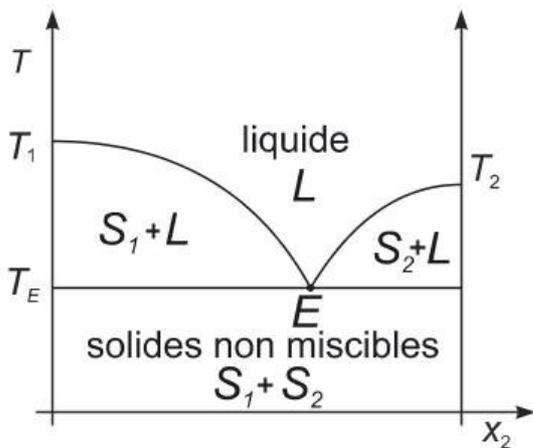
$v$  : variance (sans dimension)  
 $c$  : nombre de constituants indépendants  
 $\varphi$  : nombre de phases

### ② PSI Diagramme isobare d'équilibre solide - liquide

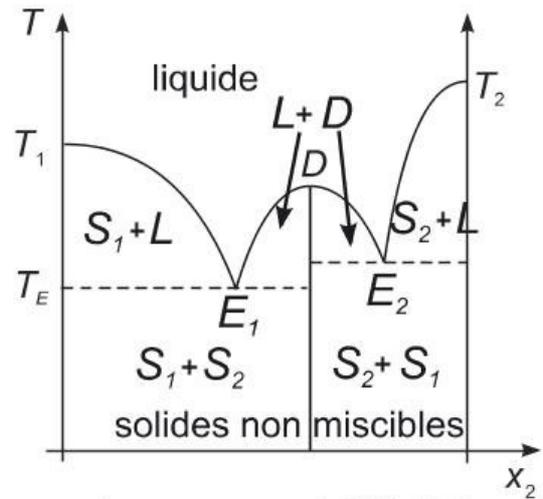
- Miscibilité totale à l'état solide : fuseau simple ou double fuseau



- Miscibilité nulle à l'état solide :



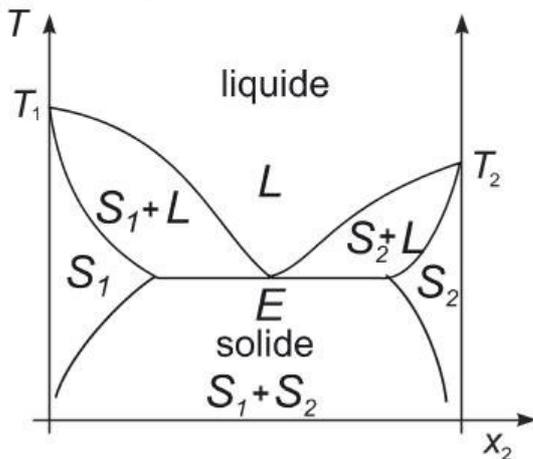
Sans composé défini



Avec composé défini D

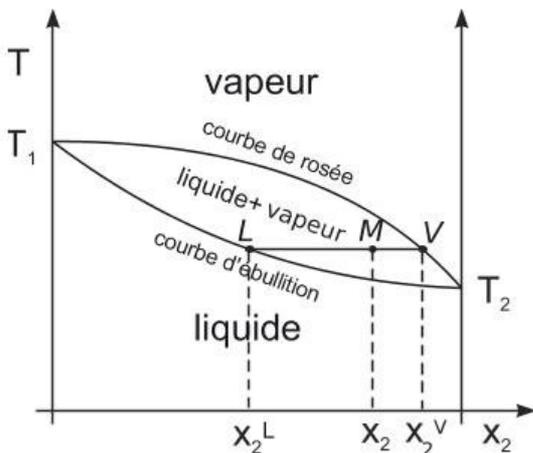
*E* est le point eutectique. Lors du changement d'état du mélange eutectique, la phase solide et la phase liquide ont la même composition.

- Miscibilité partielle à l'état solide :



*E* est un eutectique. Ici, les solides sont parfois miscibles, parfois non miscibles.

**2 PSI Théorème des moments chimiques**



$$x_L = \frac{x_2 - x_2^V}{x_2^L - x_2^V} = \frac{MV}{LV}$$

$x_L$  : fraction molaire en liquide (sans dimension)

$x_2, x_2^V$  et  $x_2^L$  : fractions molaires en composé 2 aux points *M*, *V* et *L* (sans dimension)

## 1.5 Application du premier principe à la transformation chimique

②

### Grandeurs de réaction

$$\Delta_r X = \sum_i \nu_i X_{m_i} = \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \right)_{T,p}$$

$\Delta_r X$  : grandeur de réaction (J.mol<sup>-1</sup>)

$\nu_i$  : coefficient stœchiométrique algébrique pour le composé A<sub>i</sub> (sans dimension)

$X_{m_i}$  : grandeur molaire pour le composé A<sub>i</sub> (J.mol<sup>-1</sup>)

$X$  : grandeur pour le composé A<sub>i</sub> (J)

$\xi$  : avancement molaire (mol)

②

### Enthalpie standard de réaction – Loi de Hess

$$\Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ$$

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de réaction (J.mol<sup>-1</sup>)

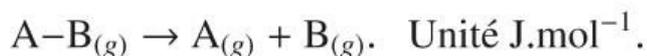
$\nu_i$  : coefficient stœchiométrique algébrique pour le composé A<sub>i</sub> (sans dimension)

$\Delta_f H_i^\circ$  : enthalpie standard de formation du composé A<sub>i</sub> (J.mol<sup>-1</sup>)

②

### PSI Enthalpie standard de dissociation de liaison

L'enthalpie standard de dissociation de la liaison A–B, notée  $\Delta_{\text{diss}} H_T^\circ$ , est l'enthalpie de la réaction de dissociation d'une mole de liaison à la température  $T$  :



## ② Relation variation d'enthalpie - enthalpie de réaction

$$\Delta H^\circ = \xi \Delta_r H^\circ$$

Réacteur isobare et isotherme :

$$Q_p = \Delta H^\circ = \xi \Delta_r H^\circ$$

$\Delta H^\circ$  : variation d'enthalpie standard (J)

$\xi$  : avancement molaire (mol)

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie standard de réaction ( $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

$Q_p$  : énergie thermique à pression constante (J)

## 1.6 Application du second principe à la transformation chimique

### ② Potentiel thermodynamique

Un potentiel thermodynamique est une fonction qui atteint une valeur minimum à l'équilibre.

### ② PSI Identités thermodynamiques

$$dU = TdS - pdV$$

$$dH = TdS + Vdp$$

$U$  : énergie interne (J)

$T$  : température (K)

$S$  : entropie ( $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ )

$p$  : pression (Pa)

$V$  : volume ( $\text{m}^3$ )

$H$  : enthalpie (J)

### ② Enthalpie libre

$$G = H - TS$$

écriture différentielle :

$$dG = Vdp - SdT$$

$G$  : enthalpie libre (J)

$H$  : enthalpie (J)

$T$  : température (K)

$S$  : entropie ( $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ )

$V$  : volume ( $\text{m}^3$ )

$p$  : pression (Pa)

### ② Enthalpie libre de réaction

$$\Delta_r G = \Delta_r H - T \Delta_r S$$

$\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction  
(J.mol<sup>-1</sup>)

$\Delta_r H$  : enthalpie de réaction  
(J.mol<sup>-1</sup>)

$T$  : température (K)

$\Delta_r S$  : entropie de réaction  
(J.K<sup>-1</sup>.mol<sup>-1</sup>)

## ② Potentiel chimique et enthalpie libre

$$\mu_i = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_{j \neq i}}$$

$$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\mu_i$  : potentiel chimique du composé  
 $A_i$  (J.mol<sup>-1</sup>)

$G$  : enthalpie libre (J)

$n_i$  : quantité de matière du composé  
 $A_i$  (mol)

$T$  : température (K)

$p$  : pression (Pa)

$\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction  
(J.mol<sup>-1</sup>)

$\nu_i$  : coefficient stœchiométrique  
algébrique pour le composé  $A_i$   
(sans dimension)

## ② Potentiel chimique d'un constituant

$$\mu_i = \mu_i^\circ + RT \ln a_i$$

$\mu_i$  : potentiel chimique du composé  
 $A_i$  (J.mol<sup>-1</sup>)

$\mu_i^\circ$  : potentiel chimique standard du  
composé  $A_i$  (J.mol<sup>-1</sup>)

$R$  : constante des gaz parfaits  
(J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)

$T$  : température (K)

$a_i$  : activité du composé  $A_i$  (sans di-  
mension)

## ② PSI Enthalpie libre, enthalpie libre standard et quotient de réaction

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q_r$$

$\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction (J.mol<sup>-1</sup>)

$\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction (J.mol<sup>-1</sup>)

$R$  : constante des gaz parfaits (J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)

$T$  : température (K)

$Q_r$  : quotient de réaction (sans dimension)

## ② Condition d'équilibre physique

Pour un corps pur en équilibre sous deux phases, les potentiels chimiques du corps dans les deux phases sont égaux :  $\mu_{\varphi_1} = \mu_{\varphi_2}$ .

## ② Évolution d'un équilibre pour un corps pur

Un système biphasique évolue dans le sens des potentiels chimiques décroissants, jusqu'à ce que les potentiels chimiques de chaque phase deviennent égaux. L'évolution est spontanée si  $\Delta_r G < 0$ .

## ② Relation enthalpie libre de réaction – Quotient de réaction

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q_r$$

$\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction (J.mol<sup>-1</sup>)

$\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction (J.mol<sup>-1</sup>)

$R$  : constante des gaz parfait (J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)

$T$  : température (K)

$Q_r$  : quotient de réaction (sans dimension)

## ② PSI

## Relation à l'équilibre

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ$$

et  $\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q_r$

donc  $\Delta_r G = RT \ln \frac{Q_r}{K^\circ}$

$\Delta_r G^\circ$  : enthalpie libre standard de réaction ( $\text{J.mol}^{-1}$ )

$R$  : constante des gaz parfaits ( $\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )

$T$  : température (K)

$K^\circ$  : constante d'équilibre (sans dimension)

$Q_r$  : quotient de réaction (sans dimension)

## ② Effet de la température – Relation de Van't Hoff

$$\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}$$

$K^\circ$  : constante d'équilibre (sans dimension)

$T$  : température (K)

$\Delta_r H^\circ$  : enthalpie de réaction ( $\text{J.mol}^{-1}$ )

$R$  : constante des gaz parfaits ( $\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )

## ②

## Variance – Règle de Gibbs

$$v = c + 2 - \varphi$$

$v$  : variance (sans dimension)

$c$  : nombre de constituants indépendants

$\varphi$  : nombre de phases

## ②

## Critère d'évolution

- Une augmentation de température déplace l'équilibre dans le sens endothermique.
- Une augmentation de pression déplace l'équilibre dans le sens de la diminution de la quantité de matière de gaz.
- L'ajout d'un constituant actif déplace l'équilibre dans le sens de la consommation de ce constituant.

## 2. Cinétique

### 2.1 Cinétique formelle

#### ① Vitesse de réaction

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt}$$

$$v = \frac{1}{\nu_i} \frac{d[A_i]}{dt} \quad \text{si } V = \text{cste}$$

$v$  : vitesse de réaction ( $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )

$V$  : volume total (L)

$\xi$  : avancement molaire (mol)

$t$  : temps (s)

$\nu_i$  : coefficient stœchiométrique algébrique (sans dimension)

$[A_i]$  : concentration molaire en composé  $A_i$  ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

#### ① Vitesses de formation d'un produit et de disparition d'un réactif

$$v_f = \frac{d[A_i]}{dt} \quad \text{si } V = \text{cste}$$

$$v_d = -\frac{d[A_i]}{dt} \quad \text{si } V = \text{cste}$$

$v_f$  : vitesse de formation d'un produit ( $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )

$v_d$  : vitesse de disparition d'un réactif ( $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )

$[A_i]$  : concentration molaire en composé  $A_i$  ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

$t$  : temps (s)

#### ① Ordre d'une réaction et loi de vitesse

La réaction  $\alpha A + \beta B = \gamma C + \delta D$  admet un ordre si la loi de vitesse peut se mettre sous la forme :

$$v = k[A]^{q_1}[B]^{q_2}$$

Généralisation :

$$v = k \prod_i [A_i]^{q_i} \quad \text{et} \quad q = \sum_i q_i$$

$v$  : vitesse de réaction ( $\text{mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )

$k$  : constante de vitesse (son unité dépend de la loi de vitesse)

$[A_i]$  : concentration molaire en réactif  $A_i$  ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

$q_i$  : ordre partiel par rapport au réactif  $A_i$  (sans dimension)

$q$  : ordre global de la réaction (sans dimension)

### 1 Loi de vitesse avec un réactif unique

Soit la réaction  $\alpha A \rightarrow$  Produits. Si la réaction admet un ordre, sa loi de vitesse

s'écrit  $v = \frac{1}{-\alpha} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^q$  ( $\alpha =$  coefficient stœchiométrique).

• Ordre 0 :  $[A]_t = [A]_0 - \alpha kt$

$[A]_t = f(t)$  est une fonction affine de pente  $-\alpha k$  et d'ordonnée à l'origine  $[A]_0$ .

• Ordre 1 :  $[A]_t = [A]_0 e^{-\alpha kt}$  et  $\ln[A]_t = \ln[A]_0 - \alpha kt$ .

$\ln[A]_t = f(t)$  est une fonction affine de pente  $-\alpha k$  et d'ordonnée à l'origine  $\ln[A]_0$ .

• Ordre 2 :  $\frac{1}{[A]_t} = \frac{1}{[A]_0} + \alpha kt$

$\frac{1}{[A]_t} = f(t)$  est une fonction affine de pente  $+\alpha k$  et d'ordonnée à l'origine  $\frac{1}{[A]_0}$ .

### 1 Temps de demi-réaction

Le temps de demi-réaction  $t_{1/2}$  est le temps au bout duquel la moitié du réactif limitant a été consommée, soit  $[A]_t = \frac{[A]_0}{2}$  (concentration restante).

• Ordre 0 :  $t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2\alpha k}$   $t_{1/2}$  est proportionnel à  $[A]_0$ .

• Ordre 1 :  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\alpha k}$   $t_{1/2}$  est indépendant de  $[A]_0$ .

• Ordre 2 :  $t_{1/2} = \frac{1}{\alpha k[A]_0}$   $t_{1/2}$  est inversement proportionnel à  $[A]_0$ .

### 1 Temps de demi-vie

Le temps de demi-vie est le temps au bout duquel la quantité de substance ra-

dioactive a été divisée par deux par désintégration radioactive.

### 1 Dégénérescence de l'ordre

Dans le cas où la réaction entre deux réactifs admet un ordre et que l'un d'entre eux (ici B) est introduit en large excès par rapport à l'autre (ici A), alors la consommation de B est négligeable, soit  $[B]_t \approx [B]_0$ . Ainsi, la loi de vitesse devient :

$$v = k_{\text{app}}[A]^a \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} = k[B]^b = \text{constante de vitesse apparente}$$

L'ordre apparent ( $a$ ) étant différent de l'ordre global ( $a + b$ ), on parle de dégénérescence de l'ordre.

### 1 Conditions initiales stœchiométriques

Lorsque les réactifs sont introduits en proportions stœchiométriques (c'est-à-dire  $\frac{[A]_0}{\alpha} = \frac{[B]_0}{\beta}$  pour la réaction  $\alpha A + \beta B \rightarrow \text{Produits}$ ), ils le restent tout au long de la réaction (soit  $\frac{[A]_t}{\alpha} = \frac{[B]_t}{\beta}$ ). On se ramène ensuite à l'étude d'une réaction avec un réactif unique.

### 1 Loi d'Arrhenius

$$\frac{d \ln k}{dT} = \frac{E_a}{RT^2}$$

Forme intégrée :  $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$

soit  $\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}$

$k$  : constante de vitesse (son unité dépend de la loi de vitesse)

$T$  : température (K)

$E_a$  : énergie d'activation ( $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

$R$  : constante des gaz parfaits ( $8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )

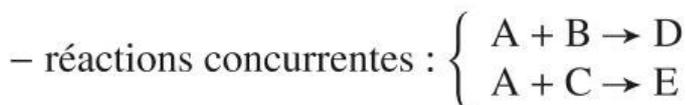
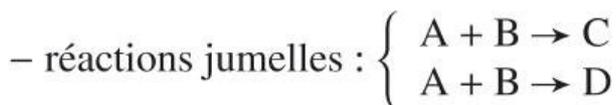
$A$  : constante d'Arrhenius ou facteur pré-exponentiel ou facteur de fréquence (unité de  $k$ )

La forme intégrée est valable si  $E_a = \text{cste}$  dans le domaine de température considéré.

$\ln k = f\left(\frac{1}{T}\right)$  est une droite de pente  $-\frac{E_a}{R}$  et d'ordonnée à l'origine  $\ln A$ .

## ① Réactions complexes ou composées

• Réactions parallèles (ou compétitives) : réactions possédant au moins un réactif en commun. Si tous les réactifs sont identiques, les réactions sont jumelles, sinon elles sont concurrentes.



• Réactions opposées (ou inversables) : la réaction directe et la réaction inverse ont lieu simultanément :  $\begin{cases} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{cases}$

• Réactions successives (ou consécutives) : réactions au cours desquelles les réactifs fournissent des produits intermédiaires qui permettent ensuite de former de nouveaux produits :  $\begin{cases} A + B \rightarrow C \\ C + D \rightarrow E \end{cases}$

## 2.2 Mécanismes réactionnels

### ① Loi cinétique de Van't Hoff

La loi cinétique de Van't Hoff est la loi de vitesse associée à un acte (ou processus) élémentaire :

$$v = k \prod_i [A_i]^{\alpha_i}$$

$k$  : constante de vitesse (son unité dépend de la loi de vitesse)

$[A_i]$  : concentration molaire en réactif  $A_i$  ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

$\alpha_i$  : coefficient stœchiométrique de  $A_i$  (sans dimension)

### ① Principe de Bodenstein ou Approximation de l'État Quasi Stationnaire (AEQS)

Lorsqu'un intermédiaire réactionnel (noté IR) se forme avec une vitesse très faible par rapport à sa vitesse de disparition, l'espèce ne s'accumule pas dans

le milieu, après une période dite d'induction, soit :  $\frac{d[\text{IR}]}{dt} \approx 0$

### ① Approximation de l'Étape Cinétiquement Déterminante (AECD)

Dans un mécanisme réactionnel, lorsqu'une étape a une constante de vitesse beaucoup plus faible que les autres, elle impose sa vitesse à toutes les autres étapes et est qualifiée d'Étape Cinétiquement Déterminante (ECD), soit :

$$v = v_{\text{ECD}}$$

### ① Catalyseur

Un catalyseur est un composé qui augmente la vitesse d'une réaction thermodynamiquement favorable sans en modifier l'état final prévu par la thermodynamique et sans apparaître dans l'équation de la réaction.

## 3. Architecture de la matière

### 3.1 Classification périodique des éléments

#### ① Quantification de l'énergie

Pour une transition électronique (absorption ou émission) :

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Relation de De Broglie :  $\lambda = \frac{h}{mv}$   
(prononcer « De Breuil »)

$\Delta E$  : variation d'énergie (J)  
 $h$  : constante de Planck  
 $= 6,6261 \times 10^{-34} \text{ J.s}$   
 $\nu$  : fréquence (Hz)  
 $c$  : célérité de la lumière  
 $= 2,9979 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$   
 $\lambda$  : longueur d'onde dans le vide (m)  
 $m$  : masse de la particule (kg)  
 $v$  : vitesse de la particule ( $\text{m.s}^{-1}$ )

#### ① Énergie de l'atome d'hydrogène

- Niveaux d'énergie

Atome d'hydrogène :  $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$

Espèce hydrogénoïde :  $E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2}$   
 (espèce possédant un seul électron, comme l'atome d'hydrogène)

$E_n$  : énergie pour le niveau  $n$  (eV)  
 $n$  : nombre quantique principal (sans dimension),  $\in \mathbb{N}^*$   
 $Z$  : numéro atomique de l'élément (sans dimension)

- Transition entre deux niveaux d'énergie : relation de Rydberg-Ritz

$$\bar{\nu} = R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

et  $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$

$\bar{\nu}$  : nombre d'onde ( $\text{m}^{-1}$ )  
 $R_H$  : constante de Rydberg  
 $= 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$   
 $n$  et  $n'$  : nombres quantiques principaux (sans dimension) avec  $n < n'$ ,  $\in \mathbb{N}^*$   
 $\lambda$  : longueur d'onde (m)  
 $\nu$  : fréquence (Hz)  
 $c$  : célérité de la lumière ( $\text{m.s}^{-1}$ )

### 1 Énergie d'un atome quelconque

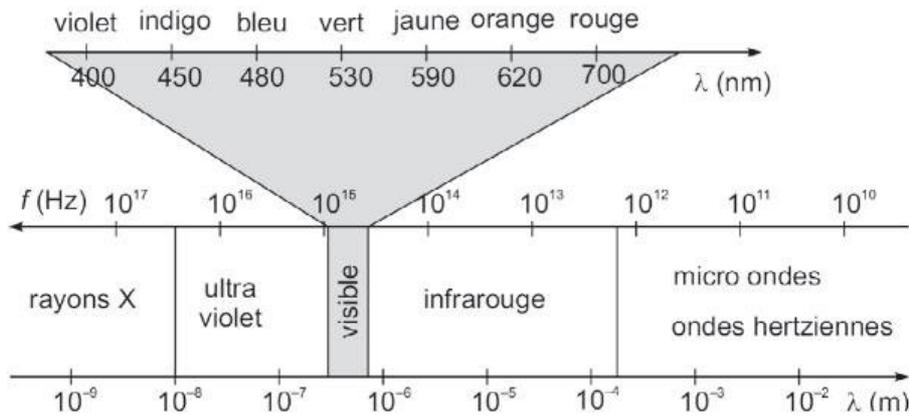
$$E_n = -13,6 \frac{Z^{*2}}{n^{*2}}$$

$E_n$  : énergie pour le niveau  $n$  (eV)  
 $Z^*$  : numéro atomique effectif (sans dimension)  
 $n^*$  : nombre quantique principal effectif ou apparent (sans dimension),  $\in \mathbb{N}^*$

### 1 Nombres quantiques

- Nombre quantique principal  $n$  :  $n \in \mathbb{N}^*$ , détermine le niveau ou la couche électronique (dont l'énergie dépend de  $n$ ).
- Nombre quantique secondaire (ou orbital ou azimutal)  $\ell$  :  $0 \leq \ell \leq n - 1$  et  $\ell \in \mathbb{N}$ , détermine le sous-niveau ou la sous-couche électronique. À un niveau  $n$  correspondent  $n$  sous-niveaux électroniques, d'énergie dépendant de  $n$  et  $\ell$ .
- Nombre quantique magnétique  $m_\ell$  :  $-\ell \leq m_\ell \leq \ell$  et  $m_\ell \in \mathbb{Z}$ , détermine la case quantique. À une sous-couche  $\ell$  correspondent  $2\ell + 1$  cases quantiques, d'énergie dépendant de  $n$  et  $\ell$  donc de même énergie. On dit qu'il y a dégénérescence des niveaux d'énergie.

- Nombre quantique de spin  $m_s$  :  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , définit l'orientation d'un électron dans un champ magnétique.

**1****Spectre électromagnétique****1****Configuration électronique**

Une case quantique est définie par le triplet  $(n, \ell, m_\ell)$ .

- Principe d'exclusion de Pauli : dans un atome, deux électrons ne peuvent pas avoir leurs quatre nombres quantiques identiques  $(n, \ell, m_\ell, m_s)$ . Par conséquent, une case quantique ne peut contenir que deux électrons (un électron de spin up, soit  $m_s = \frac{1}{2}$ , et un électron de spin down, soit  $m_s = -\frac{1}{2}$ ).

- Règle de Klechkowski : on remplit les cases quantiques par ordre croissant d'énergie donc par  $n + \ell$  croissant. Pour une même valeur de  $n + \ell$ , on remplit par ordre croissant de  $n$ .

- Règle de Hund : pour des cases quantiques dégénérées (de même énergie), les électrons occupent le maximum de cases quantiques avec des spins up.

- Cas des cations : pour obtenir la configuration électronique d'un cation, on enlève tout d'abord les électrons les plus éloignés du noyau donc de  $n$  le plus grand.

**1****Électrons de cœur et de valence**

- Électrons de valence : électrons de la couche dont le  $n$  est le plus grand (couche de valence) + électrons de la sous-couche  $n - 1$  ou  $n - 2$  en cours de remplissage.

- Électrons de cœur : électrons des couches et sous-couches saturées (de niveaux inférieurs à la couche de valence).

1

## Rayons

- Rayon atomique : fait référence à trois définitions :
  - Rayon orbitalaire : le rayon de l'atome correspond au rayon de la plus haute orbitale atomique occupée dont la formule est  $r = \frac{n^{*2}}{Z^*} a_0$  dans le modèle de Slater, avec  $n^*$  le nombre quantique principal apparent et  $Z^*$  la charge nucléaire effective.
  - Rayon covalent : le rayon de l'atome correspond à la moitié de la distance entre deux atomes d'une molécule diatomique homonucléaire (de type  $A_2$ ).
  - Rayon métallique : le rayon de l'atome correspond à la moitié de la distance entre deux atomes plus proches voisins dans un cristal métallique.
- Rayon ionique : le rayon d'un ion est défini à partir de la plus petite distance entre le cation et l'anion dans un cristal ionique. Le rayon de l'ion oxyde est pris comme référence.

1

## Électronégativité

L'électronégativité, notée  $\chi$ , est une grandeur sans dimension qui mesure l'aptitude d'un atome à attirer les électrons *dans une liaison chimique*.

### 3.2 Édifices chimiques

1

#### Règles du duet et de l'octet

Pour être stable, un élément tend à saturer sa couche de valence (comme dans le cas des gaz nobles).

- Règle du duet : dans un édifice chimique, les éléments de numéro atomique inférieur à 4 (H et Li) tendent à acquérir la structure électronique de l'hélium, donc à s'entourer de 2 électrons.
- Règle de l'octet : les éléments de numéro atomique supérieur à 4 et inférieur à 18 tendent à acquérir la structure électronique du gaz noble qui les suit ou les précède (le néon ou l'argon) de façon à avoir 8 électrons dans leur couche de valence.

- Hypervalence : à partir de la troisième période, la règle de l'octet peut être transgressée. En effet, pour le bloc p, la valence peut devenir supérieure à 4.

①

## Charge formelle

$$q = n_{\text{isolé}} - n_{\text{lié}}$$

(sans dimension)

 $q$  : charge formelle $n_{\text{isolé}}$  : nombre d'électrons de valence de l'atome isolé $n_{\text{lié}}$  : nombre d'électrons de valence de l'atome lié (1 électron pour un doublet liant, 2 électrons pour un doublet non liant)

①

## Règles de la mésomérie

Une forme mésomère a d'autant plus de poids dans la représentation de la répartition des électrons que :

- Règle 1 : les atomes respectent la règle de l'octet ou ont une hypervalence compatible avec leur configuration électronique.
- Règle 2 : les charges formelles sont les plus petites possible et les charges formelles de même signe sont les plus éloignées possible les unes des autres.
- Règle 3 : les charges formelles sont en accord avec les électronégativités des atomes.

La règle 1 est prioritaire devant la règle 2, elle-même prioritaire devant la règle 3, sauf dans le cas des éléments susceptibles d'être hypervalents.

①

## Liaison polarisée – moment dipolaire

Une liaison est polarisée lorsqu'il y a une répartition asymétrique des charges (due à une différence d'électronégativité entre les atomes) sur celle-ci.

- Moment dipolaire pour une liaison A – B :  $\|\vec{\mu}_{\text{A-B}}\| = qd_{\text{A-B}}$

- Moment dipolaire pour une molécule :  $\vec{\mu} = \sum_i \vec{\mu}_i$

$\mu$  : moment dipolaire (C.m)    autre unité : le debye :  $1 \text{ D} = \frac{1}{3} \times 10^{-29} \text{ C.m}$

Une molécule est polaire si  $\vec{\mu} \neq \vec{0}$  et apolaire si  $\vec{\mu} = \vec{0}$ .

$q = \delta e$  : charge (C) avec  $\delta$  le pourcentage ionique (sans dimension) et  $e$  la charge élémentaire ( $1,6 \times 10^{-19}$  C)

$d_{A-B}$  : longueur de la liaison A – B (m)

### 1 Interactions de Van der Waals

- Interaction dipôle permanent - dipôle permanent (ou de Keesom) :

$$E_K = -\frac{k_K}{r^6}$$

$E_K$  : énergie d'interaction de Keesom ( $\text{J.mol}^{-1}$ )

$k_K$  : terme dépendant des moments dipolaires et de la température ( $\text{J.mol}^{-1}.\text{m}^{-6}$ )

$r$  : distance entre les barycentres des molécules (m)

- Interaction dipôle permanent - dipôle induit (ou de Debye) :

$$E_D = -\frac{k_D}{r^6}$$

$E_D$  : énergie d'interaction de Debye ( $\text{J.mol}^{-1}$ )

$k_D$  : terme dépendant du moment dipolaire de la molécule polaire et de la polarisabilité de la molécule apolaire ( $\text{J.mol}^{-1}.\text{m}^{-6}$ )

- Interaction dipôle instantané - dipôle instantané (ou de London) :

$$E_L = -\frac{k_L}{r^6}$$

$E_L$  : énergie d'interaction de London ( $\text{J.mol}^{-1}$ )

$k_L$  : terme dépendant des polarisabilités ( $\text{J.mol}^{-1}.\text{m}^{-6}$ )

Ces énergies sont de l'ordre de 1 à 10  $\text{kJ.mol}^{-1}$ .

### 1 Liaison hydrogène

Il y a formation d'une liaison hydrogène entre deux espèces chimiques si :

- la première espèce possède un atome A très électronégatif, petit et lié à un atome d'hydrogène H ;
- la deuxième espèce possède un atome B très électronégatif et porteur d'au moins un doublet non liant.

Les éléments jouant le rôle de A et B sont très souvent N, O ou F.

Les trois atomes sont alignés et une liaison hydrogène est environ deux fois plus longue qu'une liaison covalente :  $A - H \cdots \cdots | B$

Ordre de grandeur de l'énergie : 1 à 40 J.mol<sup>-1</sup>.

## ① Permittivité électrique relative ou constante diélectrique

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

$\varepsilon_r$  : constante diélectrique (sans dimension)

$\varepsilon$  : permittivité électrique du milieu (F.m<sup>-1</sup>)

$\varepsilon_0$  : permittivité électrique du vide (8,85 × 10<sup>-12</sup> F.m<sup>-1</sup>)

La permittivité électrique relative permet de rendre compte de la capacité du milieu à réagir à un champ électrique. Une forte constante diélectrique entraîne une diminution des forces d'attraction électrostatiques.

## ① Propriétés des solvants

- Lorsque le solvant possède un moment dipolaire  $\vec{\mu}$  important, il permet de solvater et ioniser les composés.
- Lorsque le solvant possède une permittivité électrique relative  $\varepsilon_r$  importante, il permet de dissocier les paires d'ions formées après ionisation d'espèces ionisables.
- Un solvant protique (ou protogène) est un solvant susceptible de libérer un ou plusieurs protons et de former des liaisons hydrogène.

# 4. État solide

## 4.1 Modèle du cristal parfait

### ① Définitions

- Cristal parfait : assemblage de mailles parallélépipédiques.
- Maille (élémentaire ou primitive) : partie à partir de laquelle on peut reconstituer tout le cristal par translation.

- Population (ou multiplicité) : nombre d'atomes contenus dans une maille.
- Coordinence : nombre d'entités en contact avec une même entité.
- Compacité : rapport (sans dimension) entre le volume réellement occupé par les entités de la maille et le volume total de la maille :  $C = \frac{V_{\text{occupé}}}{V_{\text{maille}}}$

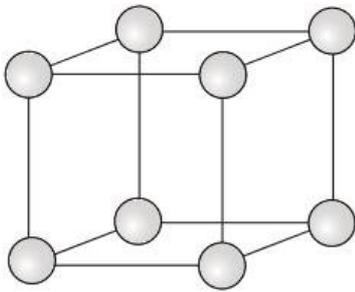
- Masse volumique (d'une maille) :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{\sum_i N_i M_i}{N_A V_{\text{maille}}}$$

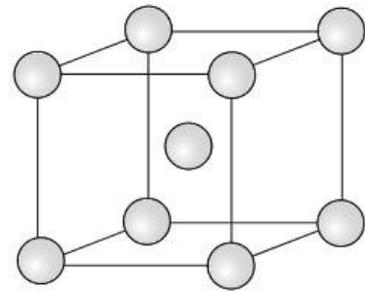
$\rho$  : masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )  
 $N_i$  : nombre d'entités de type  $i$  (sans dimension)  
 $M_i$  : masse molaire de l'entité de type  $i$  ( $\text{kg.mol}^{-1}$ )  
 $N_A$  : nombre d'Avogadro ( $\text{mol}^{-1}$ )  
 $V_{\text{maille}}$  : volume de la maille ( $\text{m}^3$ )

**1 Modèles d'empilement compact**

Cubique simple (CS)



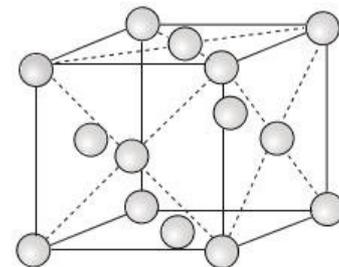
Cubique centré (CC)



**1 Maille cubique à faces centrées (CFC)**

Maille constituée d'une entité par sommet et par milieu de face

4 entités par maille ( $\frac{1}{2} \times 6 + \frac{1}{8} \times 8$ )  
 Coordinence = 12  
 Compacité = 0,74

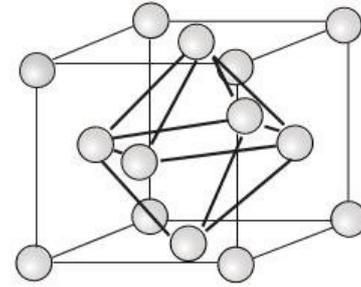


**1 Sites interstitiels de la maille CFC**

- Sites octaédriques :

4 sites par maille : au centre et au milieu de chaque arête de la maille

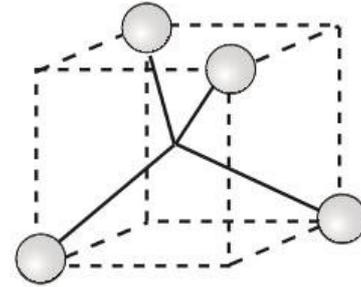
dimension :  $r_O = (\sqrt{2} - 1)r$



• Sites tétraédriques :

8 sites par maille : au centre de 8 petits cubes d'arête  $\frac{a}{2}$

dimension :  $r_T = \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r$



## 1

## Alliages

- Alliage de substitution : alliage obtenu en remplaçant certaines entités d'un cristal par d'autres (en mêmes quantité et position).
- Alliage d'insertion : alliage obtenu en ajoutant de petites entités dans les interstices du cristal de départ.

## 4.2 Types de cristaux

### 1

### Cristal métallique

Empilement d'atomes dont la cohésion est assurée par des liaisons métalliques (pas de liaison directe mais une mise en commun globale des électrons).

EXEMPLE : Fe, Al.

### 1

### Cristal ionique

Empilement d'ions (cations et anions) dont la cohésion est assurée par des liaisons ioniques (interactions électrostatiques).

EXEMPLE : chlorure de sodium NaCl.

### 1

### Cristal covalent

Empilement d'atomes dont la cohésion est assurée par des liaisons covalentes.

EXEMPLE : C diamant.

## ① Cristal moléculaire

Empilement de molécules dont la cohésion est assurée par des liaisons faibles (interactions de Van der Waals et liaisons hydrogène).

EXEMPLE : H<sub>2</sub>O, I<sub>2</sub>.

# 5. Solutions aqueuses

## 5.1 Réaction d'oxydo-réduction

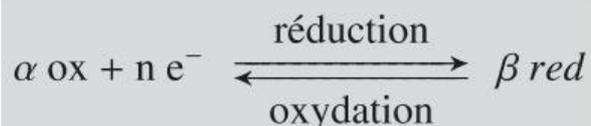
### ① Nombre ou degré d'oxydation

Le nombre d'oxydation (n.o.) ou degré d'oxydation (d.o.) est un nombre algébrique, noté en chiffres romains, caractérisant l'état d'oxydation d'un élément dans une espèce chimique (plus le nombre est grand, plus l'élément est oxydé et peut être réduit).

- Le n.o. d'un élément dans un corps simple ou dans un ion monoatomique est nul.
- Dans un édifice polyatomique, les électrons de chaque liaison covalente sont attribués arbitrairement à l'atome le plus électronégatif. Le n.o. de chaque élément de l'édifice est alors égal à sa charge fictive totale.
- Dans un édifice chimique, la somme des nombres d'oxydation est égale à la charge électrique totale du composé.

### ① Couple rédox – Réaction d'oxydo-réduction

- Un couple rédox, composé d'un oxydant (noté ox) et d'un réducteur (noté red), est associé à la demi-équation électronique :



Un oxydant est une espèce capable de capter des électrons.

Un réducteur est une espèce capable de céder des électrons.

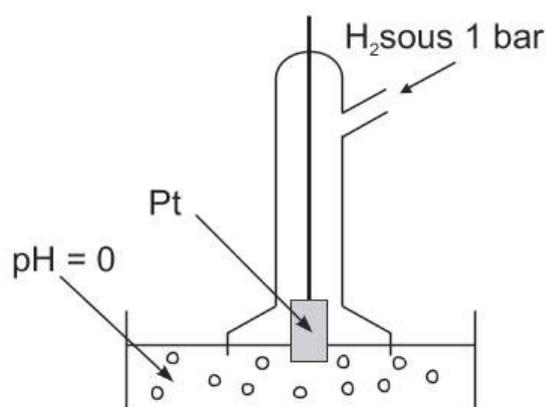
- Lors d'une réaction d'oxydo-réduction, il y a échange d'électrons entre le réducteur d'un couple et l'oxydant d'un autre couple.

## ① Dismutation et médimutation

- La réaction dont le réactif est une espèce amphotère (permettant de former à la fois son oxydant et son réducteur associés) est appelée dismutation.
- La réaction dont le produit est à la fois l'oxydant du réactif réducteur et le réducteur du réactif oxydant (donc une espèce amphotère) est appelée médi-mutation ou amphotérisation.

## ① Électrode Standard à Hydrogène (ESH)

L'électrode standard à l'hydrogène est l'électrode de référence absolue. Elle met en jeu le couple rédox  $\text{H}_3\text{O}^+ / \text{H}_2$  dont le potentiel est nul à toute température. Elle est fictive puisqu'elle doit considérer, entre autres, que  $\text{H}_2$  est un gaz parfait.



## ① Formule de Nernst

$$E = E^\circ + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \frac{a_{ox}^\alpha}{a_{red}^\beta}$$

$$\text{À } 25^\circ\text{C} \quad E = E^\circ + \frac{0,06}{n} \log \frac{a_{ox}^\alpha}{a_{red}^\beta}$$

$$\text{car} \quad \frac{RT}{\mathcal{F} \ln 10} = 0,06 \quad \text{à } 25^\circ\text{C}$$

$E$  : potentiel du couple (V)

$E^\circ$  : potentiel standard du couple (V)

$R$  : constante des gaz parfaits ( $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ )

$T$  : température (K)

$n$  : nombre d'électrons échangés (sans dimension)

$\mathcal{F} = \mathcal{N}_A e$  : constante de Faraday ( $\text{C}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

$a_i$  : activité chimique de l'espèce  $i$  (sans dimension)

$\alpha$  et  $\beta$  : coefficients stœchiométriques (sans dimension)

## ① Domaine de prédominance ou d'existence

On parle de domaine de prédominance pour les espèces dissoutes ou gazeuses et de domaine d'existence pour les solides. Ils sont établis en fonction de la valeur du potentiel  $E$  en volts.

- Pour les espèces dissoutes, la frontière entre les deux espèces d'un couple rédox est le potentiel standard du couple.
- Pour les solides et les gaz, il faut tenir compte de la concentration limite et de la pression (que l'on fixe).

Pour un diagramme horizontal (resp. vertical), l'oxydant prédomine ou existe à droite (resp. au-dessus) de la frontière tandis que le réducteur prédomine ou existe à gauche (resp. en dessous).

## ① Aspect thermodynamique

Une réaction d'oxydo-réduction est thermodynamiquement favorisée dans le cas où l'oxydant du couple dont la frontière est plus élevée réagit avec le réducteur du couple dont la frontière est plus faible.

Pour la réaction entre un réducteur appartenant à un couple 1 et un oxydant appartenant à un couple 2, on a :

$$\log K^\circ = \frac{n_1 n_2 (E_2^\circ - E_1^\circ)}{0,06}$$

$E_i^\circ$  : potentiel standard du couple  $i$  (V)

$n_i$  : nombre d'électrons échangés pour la demi-équation électronique du couple  $i$  (sans dimension)

## ① Étude d'une pile

Une pile est le siège d'une réaction d'oxydo-réduction. Elle est composée de deux demi-piles reliées par un pont salin. Chaque demi-pile est constituée d'une électrode métallique plongeant dans une solution.

Il y a oxydation à l'anode (les électrons sont libérés à l'électrode, c'est donc le pôle négatif) et réduction à la cathode (les électrons sont captés à l'électrode, c'est donc le pôle positif).

Force électromotrice de la pile :  $E = E_{\text{cathode}} - E_{\text{anode}}$

## 5.2 Réaction acido-basique

### ① Couple acide-base – Réaction acido-basique

- Un couple acide-base, composé d'un acide (noté HA) et d'une base (notée A<sup>-</sup>), est associé à la demi-équation protonique :



Un acide est une espèce capable de céder des protons.

Une base est une espèce capable de capter des protons.

- Lors d'une réaction acido-basique, il y a échange de protons entre l'acide d'un couple et la base d'un autre couple.

Une réaction acido-basique est thermodynamiquement favorisée dans le cas où le pK<sub>a</sub> du couple de la base est supérieur à celui du couple de l'acide.

### ① Définition du pH

$$\text{pH} = -\log a_{\text{H}_3\text{O}^+}$$

soit  $\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+]$

pH : potentiel hydrogène (sans dimension)

$a_{\text{H}_3\text{O}^+} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C^\circ}$  : activité des ions oxonium (sans dimension)

$C^\circ = 1 \text{ mol.L}^{-1}$  : concentration standard

Pour la suite, la grandeur  $C^\circ$  sera sous-entendue (en respectant les dimensions).

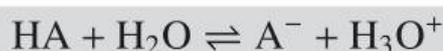
### ① Produit ionique de l'eau

$$K_e = [\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{HO}^-]$$

$$\text{p}K_e = -\log K_e = 14 \quad \text{à } 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

$K_e$  : produit ionique de l'eau (sans dimension)

$[\text{H}_3\text{O}^+]$  et  $[\text{HO}^-]$  : concentrations en ions oxonium et hydroxyde (mol.L<sup>-1</sup>)

**1** Constante d'acidité

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}]}$$

$$\text{p}K_a = -\log K_a$$

$K_a$  : constante d'acidité du couple (sans dimension)

$[\text{A}^-]$ ,  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  et  $[\text{HA}]$  : concentrations des différentes espèces en solution ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

**1** Constante de basicité

$$K_b = \frac{[\text{HA}][\text{HO}^-]}{[\text{A}^-]}$$

$$\text{p}K_b = -\log K_b$$

$K_b$  : constante de basicité du couple (sans dimension)

$[\text{HA}]$ ,  $[\text{HO}^-]$  et  $[\text{A}^-]$  : concentrations des différentes espèces en solution ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

**1** pH d'un couple acide-base

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

$[\text{A}^-]$  et  $[\text{HA}]$  : concentrations à l'équilibre des différentes espèces en solution ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

**1** Diagramme de prédominance**5.3 Réaction de complexation****1** Constante globale de formation

$$\beta_n = \frac{[\text{ML}_n]}{[\text{M}][\text{L}]^n}$$

$\beta_n$  : constante globale de formation (sans dimension)

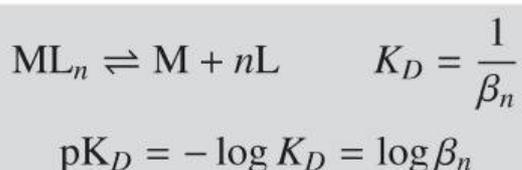
M : ion métallique

L : ligand

$\text{ML}_n$  : complexe

Plus  $\beta_n$  est grand, plus le complexe est stable.

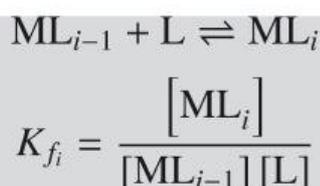
### ① Constante globale de dissociation



$K_D$  : constante globale de dissociation (sans dimension)

$\beta_n$  : constante globale de formation (sans dimension)

### ① Constante de formation successive



$K_{f_i}$  : constante de formation de  $\text{ML}_i$  à partir de  $\text{ML}_{i-1}$  (sans dimension)

### ① Constante de dissociation successive



$$K_{d_i} = \frac{1}{K_{f_i}}$$

$K_{d_i}$  : constante de dissociation de  $\text{ML}_i$  en  $\text{ML}_{i-1}$  et L (sans dimension)

$$\text{p}K_{d_i} = -\log K_{d_i} = \log K_{f_i}$$

$K_{f_i}$  : constante de formation de  $\text{ML}_i$  à partir de  $\text{ML}_{i-1}$  (sans dimension)

### ① Relations entre constantes globale et successive

$$\beta_n = \prod_i K_{f_i}$$

$$K_D = \prod_i K_{d_i}$$

et

$$\text{p}K_D = \sum_i \text{p}K_{d_i}$$

$$K_{f_i} = \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}$$

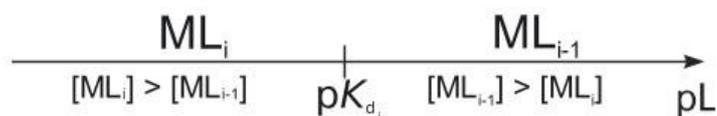
et

$$\text{p}K_{d_i} = \log \beta_{i-1} - \log \beta_i = -\log K_{f_i}$$

### ① Expression de pL

$$\text{pL} = -\log[\text{L}] = \text{p}K_{d_i} + \log \frac{[\text{ML}_{i-1}]}{[\text{ML}_i]}$$

### ① Diagramme de prédominance (successive)



## 5.4 Réaction de précipitation

### ① Solubilité

La solubilité est la quantité de matière de soluté que l'on peut dissoudre dans un litre de solvant. Elle s'exprime en  $\text{mol.L}^{-1}$ .

### ① Produit de solubilité et $\text{p}K_s$

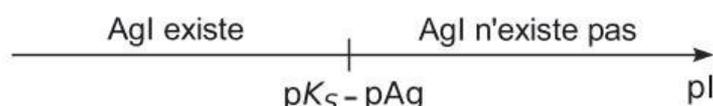


$$K_s = [A^{n+}]^a [B^{m-}]^b$$

$$\text{p}K_s = -\log K_s$$

$K_s$  : produit de solubilité (sans dimension)

### ① Diagramme d'existence



avec  $\text{pI} = -\log[\text{I}^-]$  et  $\text{pAg} = -\log[\text{Ag}^+]$  pour le précipité AgI.

Pour un précipité formé à partir des ions  $M^{n+}$  et  $X^{p-}$ , la valeur limite de  $\text{pX}$

$$\text{est : } \text{pX}_{\text{lim}} = \frac{\text{p}K_s}{n} - \frac{p}{n} \text{pM} \quad \text{avec} \quad \text{pM} = -\log[M^{n+}].$$

### ① Condition de précipitation

Il y a précipitation lorsque le quotient de réaction initial est supérieur ou égal

$$\text{au produit de solubilité, soit : } Q_{r_{\text{EI}}} = [A^{n+}]_0^a [B^{m-}]_0^b \geq K_s.$$

## 5.5 Diagrammes potentiel-pH et potentiel-pL

### ① Conventions

Il existe deux conventions possibles :

- Sur les frontières, la concentration des espèces en solution est égale à la concentration arbitrairement choisie.
- La concentration totale en un élément est fixée. Les concentrations sont alors réparties équitablement au niveau des frontières.

### 1 Lecture d'un diagramme

- Les droites horizontales symbolisent des équilibres entre oxydant et réducteur d'un couple rédox. L'oxydant est prédominant au-dessus de la frontière.
- Les droites verticales représentent des équilibres entre acide (prédomine à gauche) et base d'un couple acido-basique (pour le diagramme E-pH).

### 1 Diagramme potentiel-pH de l'eau

- Le couple  $\text{H}_2/\text{H}_2\text{O}$  possède une droite frontière de pente  $-0,06 \text{ V}$  et d'ordonnée à l'origine nulle.
  - Le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{O}_2$  possède une droite frontière de pente  $-0,06 \text{ V}$  et d'ordonnée à l'origine  $1,23 \text{ V}$ .
- (pour des pressions de 1 bar).

## 6. Électrochimie

### 6.1 Courbes intensité - potentiel

#### 2 Vitesse de réaction et intensité

$$v = \frac{d\xi}{dt} \quad \text{et} \quad i = \frac{dq}{dt} = n\mathcal{F} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\text{donc} \quad i = n\mathcal{F}v$$

$v$  : vitesse de réaction ( $\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}$ )

$\xi$  : avancement molaire (mol)

$t$  : temps (s)

$i$  : intensité du courant (A)

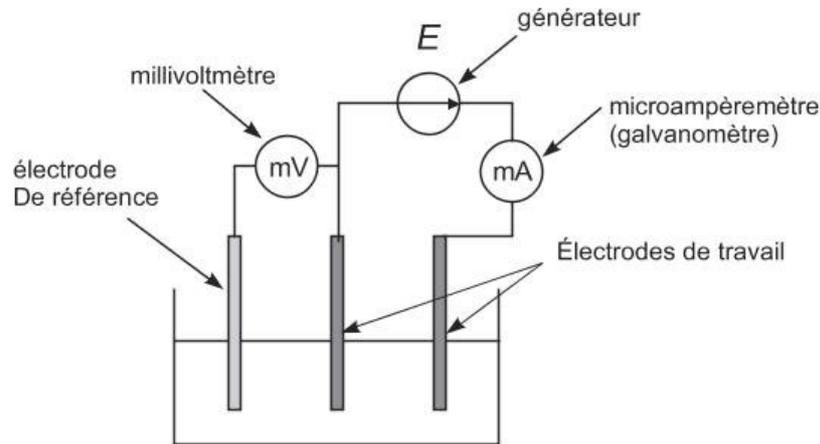
$q$  : charge traversant l'électrode (C)

$n$  : nombre d'électrons échangés

$\mathcal{F}$  : constante de Faraday ( $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

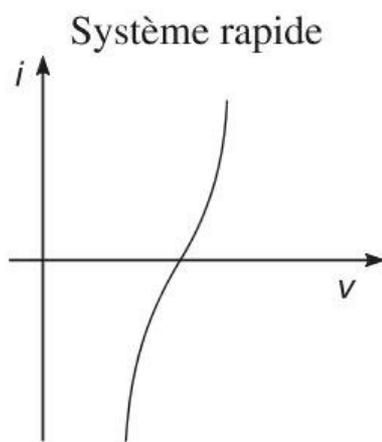
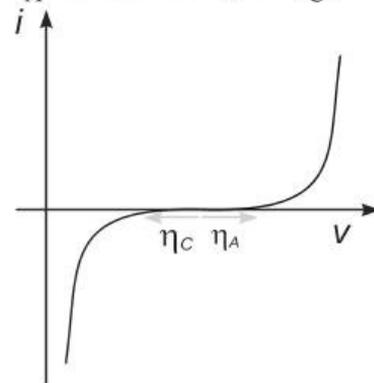
②

## Montage à trois électrodes



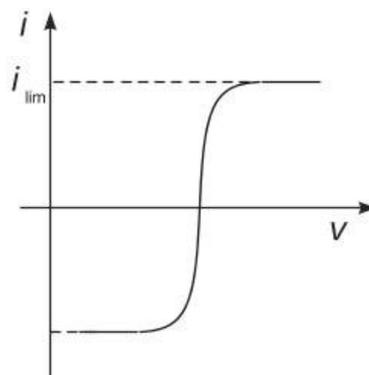
②

## Allure des courbes intensité - potentiel

Système lent (avec surtensions anodique  $\eta_A$  et cathodique  $\eta_C$ )

②

## Courant limite de diffusion



## 6.2 Corrosion

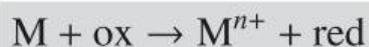
### ② Potentiel mixte

Le point de fonctionnement pour lequel le courant anodique est égal à l'opposé du courant cathodique a un potentiel appelé potentiel mixte. C'est le potentiel commun aux deux métaux en contact. On parle aussi de potentiel de corrosion.

### ② Corrosion humide

La corrosion humide correspond à l'oxydation d'un métal ou d'un alliage métallique sous l'effet de réactifs en solution.

### ② Réaction de corrosion



M : métal oxydé  
 ox : oxydant  
 red : réducteur associé  
 M<sup>n+</sup> : cation associé au métal dans un couple redox

### ② Corrosion uniforme et corrosion différentielle

La corrosion est uniforme lorsque toute la surface du métal est attaquée de la même façon.

La corrosion est différentielle lorsque l'attaque est différente suivant la zone étudiée.

### ② Domaines sur un diagramme E-pH

- Domaine de corrosion : domaine où le métal se trouve sous forme d'ions.
- Domaine d'immunité : domaine d'existence du métal.
- Domaine de passivation : domaine où le métal se trouve sous forme d'oxyde, stable et susceptible de former une couche protectrice.

### ② Protection contre la corrosion

- Revêtement : on applique une peinture, un vernis, un revêtement en plastique ou un autre métal résistant davantage à la corrosion (comme l'aluminium, le chrome ou le nickel).

- Passivation : l'oxydation du métal forme une couche d'oxyde isolante qui recouvre entièrement le métal et le protège.
- Anode sacrificielle : on relie le métal à un métal plus réducteur qui s'oxyde à la place du métal à protéger.
- Protection électrochimique : on relie le métal à une pile afin d'imposer son potentiel pour que le métal soit dans son domaine de passivité.

### 6.3 Conversion et stockage d'énergie

#### 2 Pile

Pile = conversion d'énergie chimique en énergie électrique

$$\Delta G < W \quad (\text{réaction spontanée})$$

$$\Delta_r G = -n_{\text{ox}} n_{\text{red}} \mathcal{F} (E_{\text{ox}} - E_{\text{red}})$$

Les courbes intensité - potentiel correspondant à une pile possèdent un potentiel mixte.

$\Delta G$  : variation d'enthalpie libre (J)

$W$  : travail électrique (J)

$\Delta_r G$  : enthalpie libre de réaction ( $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

$n_{\text{ox}}$  et  $n_{\text{red}}$  : nombres d'électrons échangés

$\mathcal{F}$  : constante de Faraday ( $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$ )

$E_{\text{ox}}$  et  $E_{\text{red}}$  : potentiels respectifs des couples dont l'oxydant et le réducteur sont les réactifs (V)

#### 1 Électrolyse

Électrolyse = conversion d'énergie électrique en énergie chimique (réaction non spontanée)

Tension de seuil = tension minimale à appliquer :

$$U = E_A - E_C + \eta_A - \eta_C + ri$$

Rendement faradique :

$$\eta_f = \frac{Q_{\text{décharge}}}{Q_{\text{charge}}}$$

$U$  : tension de seuil (V)

$E_A$  et  $E_C$  : potentiels des couples de l'anode et de la cathode (V)

$\eta_A$  et  $\eta_C$  : surtensions anodique et cathodique (V)

$r$  : résistance interne ( $\Omega$ )

$i$  : intensité du courant (A)

$\eta_f$  : rendement faradique

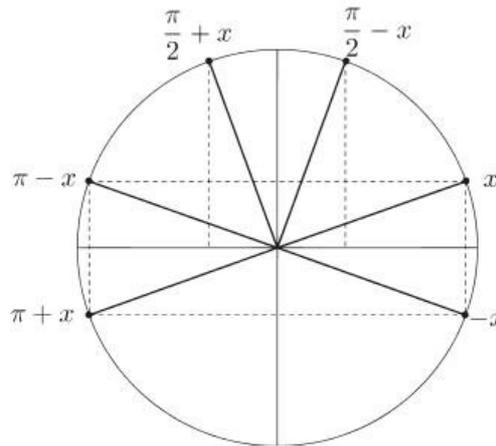
$Q_{\text{décharge}}$  : quantité d'électricité débitée lors de la décharge (C)

$Q_{\text{charge}}$  : quantité d'électricité fournie pour la charge (C)

# Annexe A

# Formulaire de trigonométrie

## 1. Angles associés



$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = -\tan x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\tan(\pi + x) = \tan x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$

## 2. Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad ;$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} .$$

## 3. Formules de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad ; \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad ; \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} .$$

Extensions :

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \quad ; \quad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \quad ; \quad \tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

## 4. Formules de linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Extensions :

$$\cos^3 a = \frac{\cos 3a + 3 \cos a}{4} \quad ; \quad \sin^3 a = \frac{-\sin 3a + 3 \sin a}{4}$$

Ces formules sont utiles pour le calcul de primitives. Au delà de la puissance 3, utilisez les formules d'Euler.

## 5. Transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

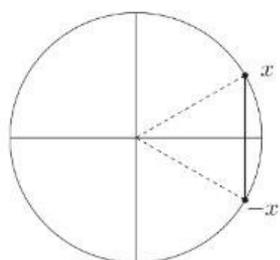
$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

## 6. Expressions en fonction de $\tan \frac{a}{2}$

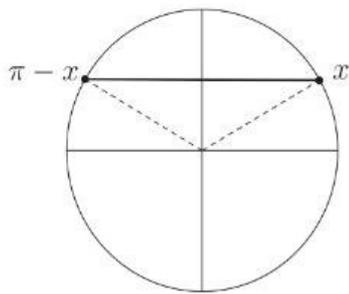
$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \tan a = \frac{2t}{1-t^2} \quad .$$

## 7. Équations trigonométriques



$$\cos x = \cos a$$

$$\iff (x = a [2\pi] \text{ ou } x = -a [2\pi])$$



$$\sin x = \sin a$$

$$\iff (x = a [2\pi] \text{ ou } x = \pi - a [2\pi])$$

# Annexe B Champs scalaires champs vectoriels

$f$  champ scalaire,  $\vec{V} = (P, Q, R)$  champ vectoriel.

## 1. Coordonnées cartésiennes

Gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Laplacien scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Divergence

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

## 2. Propriétés

Propriétés fondamentales

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \quad ; \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}.$$

Autres égalités

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f \\ \text{rot}(f\vec{V}) &= f \text{rot} \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(f\vec{V}) &= f \text{div} \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V} \\ \text{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) &= \vec{U} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \\ &\quad - \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}) \end{aligned}$$

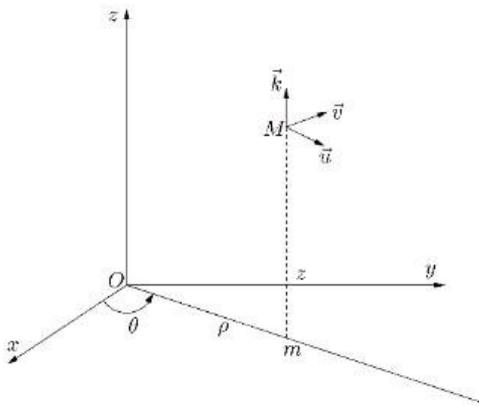
**Théorème de Poincaré**

Sur un ouvert simplement connexe (toute courbe fermée peut se ramener à un point par déformation continue), on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \iff \exists f \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$$

**3. Coordonnées cylindriques**

## • Repérage d'un point



Repère mobile  $(M; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$   
noté aussi  $(M; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

• Champ scalaire  $F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ 

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{e}_z \quad \Bigg| \quad \Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

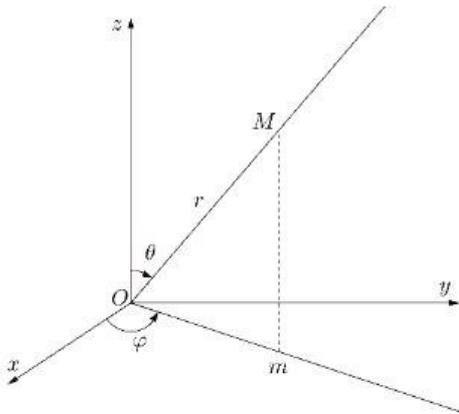
• Champ vectoriel  $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$ 

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{\rho} V_\rho + \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{\rho} V_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

## 4. Coordonnées sphériques

### • Repérage d'un point



Repère mobile  $(M; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$   
noté aussi  $(M; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$

### • Champ scalaire $F(r, \theta, \varphi) = f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

### • Champ vectoriel $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_\theta \vec{e}_\theta$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{2}{r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \tan \theta} V_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{V} = & \left( \frac{1}{r \tan \theta} V_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ & + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_\theta \right) \vec{e}_\varphi + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} V_\varphi - \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

# Annexe C Unités et constantes fondamentales

## 1. Unités du système international

### 1.1 Unités principales du système international

Grandeur physique	Unité	Symbole	Dimension
longueur	mètre	m	L
masse	kilogramme	kg	M
temps	seconde	s	T
intensité du courant électrique	ampère	A	I
température	kelvin	K	$\Theta$
quantité de matière	mole	mol	N
intensité lumineuse	candela	cd	J

### 1.2 Unités dérivées du système international

grandeur physique	unité	symbole	dimension
angle	radian	rad	
angle solide	stéradian	sr	
fréquence	hertz	Hz	$T^{-1}$
force	newton	N	$MLT^{-2}$
pression	pascal	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
énergie	joule	J	$ML^2T^{-2}$
puissance	watt	W	$ML^2T^{-3}$
charge électrique	coulomb	C	TI
différence de potentiel	volt	V	$ML^2T^{-3}I^{-1}$
résistance électrique	ohm	$\Omega$	$ML^2T^{-3}I$
conductance électrique	siemens	S	$M^{-1}L^{-2}T^3I^{-1}$
capacité électrique	farad	F	$M^{-1}L^{-2}T^2I^2$
induction magnétique	tesla	T	$MT^{-2}I^{-1}$
inductance	henry	H	$ML^2T^{-2}I^{-2}$
flux magnétique	weber	Wb	$ML^2T^{-2}I^{-1}$
éclairage	lux	lx	$L^{-2}J$

## 1.3 Préfixes

facteur	préfixe	symbole	facteur	préfixe	symbole
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	méga	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	téra	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	péta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

## 2. Constantes fondamentales

constante	valeur
constante de gravitation	$G = 6,672\,59 \times 10^{-11}$ $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ou $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
célérité de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ $\mu_0 \approx 1,256\,64 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
permittivité du vide	$\epsilon_0 \approx 8,854\,19 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
constante de Planck	$h = 6,626\,075\,5 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $h = 4,135\,669 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
nombre d'Avogadro	$N_A = 6,022\,136\,7 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante de Boltzmann	$k = 1,380\,658 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
charge élémentaire	$e = 1,602\,217\,733 \times 10^{-19} \text{ C}$
constante de Faraday	$F = 96\,485,309 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5,670\,51 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
constante de Rydberg	$R_H = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$

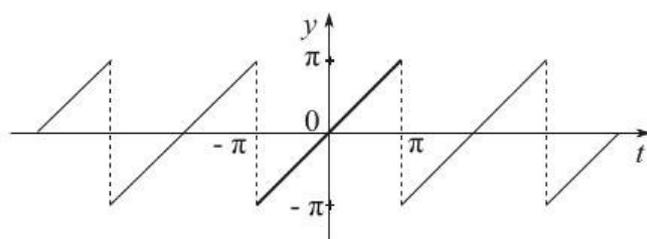
## 3. Ordres de grandeur

grandeur	valeur
conductivité du métal	$\sigma \approx 10^8 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$
tension de seuil pour une diode	$U_s \approx 0,6 \text{ V}$
champ de pesanteur à la surface de la Terre	$g \approx 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
rayon terrestre	$R_T \approx 6400 \text{ km}$
masse de la Terre	$M_T \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
altitude d'un satellite géostationnaire	$H \approx 36\,000 \text{ km}$
distance Terre-Soleil	$d_{T-S} \approx 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
distance Terre-Lune	$d_{T-L} \approx 3,8 \times 10^8 \text{ m}$
masse du Soleil	$M_S \approx 2 \times 10^{30} \text{ kg}$
raideur d'un ressort	$k \approx 100 \text{ N.m}^{-1}$
masse du proton	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
masse du neutron	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
masse de l'électron	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
taille d'un atome	$10^{-10} \text{ m}$
taille d'un noyau	$10^{-15} \text{ m}$

# Annexe D Séries de Fourier des signaux classiques

## 1. Signal 1 : rampe

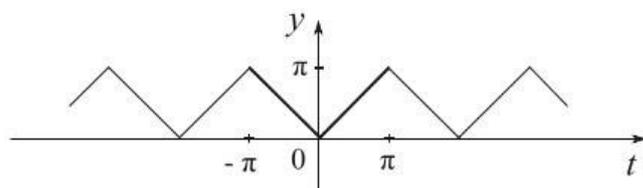
Fonction  $2\pi$  périodique avec  $f(t) = t$  sur  $] -\pi; \pi]$



$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt.$$

## 2. Signal 2 : triangle

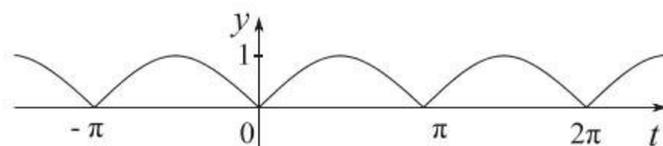
Fonction  $2\pi$  périodique avec  $f(t) = |t|$  sur  $] -\pi; \pi]$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

## 3. Signal 3 : sinus redressé (double alternance)

Fonction  $f(t) = |\sin t|$

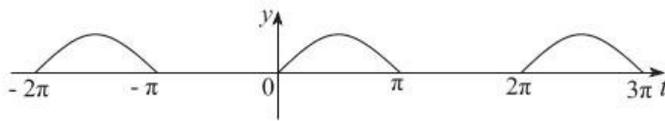


$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}.$$

## 4. Signal 4 : sinus redressé (monoalternance)

Fonction  $2\pi$  périodique avec  $\begin{cases} f(t) = \sin t & \text{pour } 0 < t \leq \pi \\ f(t) = 0 & \text{pour } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$

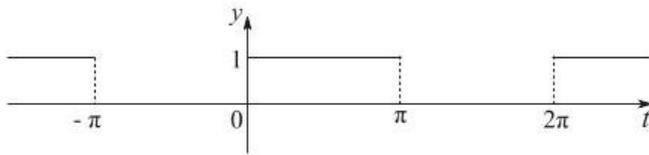
soit  $f(t) = \frac{1}{2}(|\sin t| + \sin t)$



$$\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} + \frac{1}{2} \sin t.$$

## 5. Signal 5 : porte

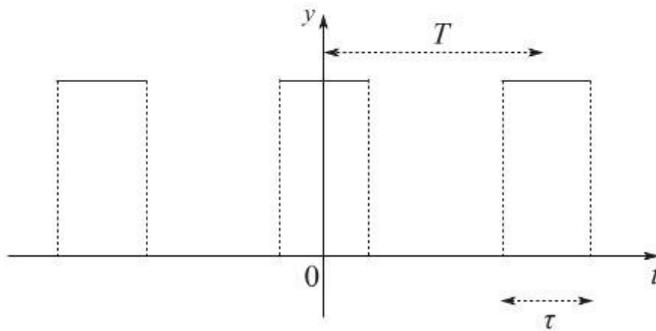
Fonction  $2\pi$  périodique avec  $\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } 0 < t \leq \pi \\ f(t) = 0 & \text{pour } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$



$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}.$$

## 6. Signal 6 : impulsion

Fonction  $T$  périodique avec sur  $[0; T[$  :  $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } \frac{\tau}{2} \leq t \leq T - \frac{\tau}{2} \\ f(t) = a & \text{sinon} \end{cases}$



$$\frac{a\tau}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n \frac{\tau}{T}} e^{i2\pi n \frac{t}{T}}.$$

# Annexe E Classification périodique

1<sup>re</sup> colonne : alcalins métalliques

2<sup>e</sup> colonne : alcalino-terreux

Colonnes 3–11 : métaux de transition

Colonne 16 : chalcogènes

Colonne 17 : halogènes

Colonnes 18 : gaz rares

	Gaz noble		Métaux
	Métaux de transition		Alcalin métalliques
	Halogène		Espèce rare
	Non métaux		Alcalino-terreux

**[E] Classification périodique**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---

I	1 <b>H</b> hydrogène 1,008								
II	3 <b>Li</b> lithium 6,94	4 <b>Be</b> béryllium 9,01							
III	11 <b>Na</b> sodium 22,99	12 <b>Mg</b> magnésium 24,31							
IV	19 <b>K</b> potassium 39,10	20 <b>Ca</b> calcium 40,08	21 <b>Sc</b> scandium 44,96	22 <b>Ti</b> titane 47,88	23 <b>V</b> vanadium 50,94	24 <b>Cr</b> chrome 52,00	25 <b>Mn</b> manganèse 54,94	26 <b>Fe</b> fer 55,85	27 <b>Co</b> cobalt 58,93
V	37 <b>Rb</b> rubidium 85,47	38 <b>Sr</b> strontium 87,62	39 <b>Y</b> yttrium 88,91	40 <b>Zr</b> zirconium 91,22	41 <b>Nb</b> niobium 92,21	42 <b>Mo</b> molybdène 95,94	43 <b>Tc</b> technétium 98,91	44 <b>Ru</b> ruthénium 101,1	45 <b>Rh</b> rhodium 102,9
VI	55 <b>Cs</b> césium 132,9	56 <b>Ba</b> baryum 137,3	57 <b>La</b> lanthane 138,9	72 <b>Hf</b> hafnium 178,5	73 <b>Ta</b> tantale 180,9	74 <b>W</b> tungstène 183,9	75 <b>Re</b> rhénium 186,2	76 <b>Os</b> osmium 190,2	77 <b>Ir</b> iridium 192,2
VII	87 <b>Fr</b> francium 223,0	88 <b>Ra</b> radium 226,0	89 <b>Ac</b> actinium 227,0						

numéro atomique → 6  
nom de l'élément → carbone  
← symbole  
← masse atomique 12,01

58 <b>Ce</b> cérium 140,1	59 <b>Pr</b> praséodyme 140,9	60 <b>Nd</b> néodyme 144,2	61 <b>Pm</b> prométhium 144,9	62 <b>Sm</b> samarium 150,4
90 <b>Th</b> thorium 232,0	91 <b>Pa</b> protactinium 231,0	92 <b>U</b> uranium 238,0	93 <b>Np</b> neptunium 237,0	94 <b>Pu</b> plutonium 244,1

10	11	12	13	14	15	16	17	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----

								2 <b>He</b> hélium 4,003
			5 <b>B</b> bore 10,81	6 <b>C</b> carbone 12,01	7 <b>N</b> azote 14,01	8 <b>O</b> oxygène 16,00	9 <b>F</b> fluor 19,00	10 <b>Ne</b> néon 20,18
			13 <b>Al</b> aluminium 26,98	14 <b>Si</b> silicium 28,09	15 <b>P</b> phosphore 30,97	16 <b>S</b> soufre 32,07	17 <b>Cl</b> chlore 35,45	18 <b>Ar</b> argon 39,95
28 <b>Ni</b> nickel 58,69	29 <b>Cu</b> cuivre 63,55	30 <b>Zn</b> zinc 65,39	31 <b>Ga</b> gallium 69,72	32 <b>Ge</b> germanium 72,59	33 <b>As</b> arsenic 74,92	34 <b>Se</b> sélénium 78,96	35 <b>Br</b> brome 79,90	36 <b>Kr</b> krypton 83,80
46 <b>Pd</b> palladium 106,4	47 <b>Ag</b> argent 107,9	48 <b>Cd</b> cadmium 112,4	49 <b>In</b> indium 114,8	50 <b>Sn</b> étain 118,7	51 <b>Sb</b> antimoine 121,8	52 <b>Te</b> tellure 127,6	53 <b>I</b> iode 126,9	54 <b>Xe</b> xénon 131,3
78 <b>Pt</b> platine 195,1	79 <b>Au</b> or 197,0	80 <b>Hg</b> mercure 200,6	81 <b>Tl</b> thallium 204,4	82 <b>Pb</b> plomb 207,2	83 <b>Bi</b> bismuth 209,0	84 <b>Po</b> polonium 210,0	85 <b>At</b> astate 210,0	86 <b>Rn</b> radon 222,0

63 <b>Eu</b> europium 152,0	64 <b>Gd</b> gadolinium 157,3	65 <b>Tb</b> terbium 158,9	66 <b>Dy</b> dysprosium 162,5	67 <b>Ho</b> holmium 164,9	68 <b>Er</b> erbium 167,3	69 <b>Tm</b> thulium 168,9	70 <b>Yb</b> ytterbium 173,0	71 <b>Lu</b> lutétium 175,0
95 <b>Am</b> américium 243,1	96 <b>Cm</b> curium 247,1	97 <b>Bk</b> berkélium 247,1	98 <b>Cf</b> californium 252,1	99 <b>Es</b> einsteinium 252,1	100 <b>Fm</b> fermium 257,1	101 <b>Md</b> mendélévium 256,1	102 <b>No</b> nobélium 259,1	103 <b>Lr</b> lawrencium 260,1

# Annexe F Constantes chimiques

## 1. Constantes acido-basiques

(à 25 °C, 1,013 bar dans l'eau)

Nom de l'acide	Acide	Base	Nom de la base	pK <sub>a</sub>
Ion hydrogénosulfure	HS <sup>-</sup>	S <sup>2-</sup>	ion sulfure	13,1
Ion hydrogénophosphate	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	ion phosphate	12,3
Ion hydrogénocarbonate	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	CO <sub>3</sub> <sup>2-</sup>	ion carbonate	10,3
Blackure d'hydrogène	HVN	CN <sup>-</sup>	ion blackure	9,3
Ion ammonium	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	NH <sub>3</sub>	ammoniac	9,2
Acide hypochloreux	HClO	ClO <sup>-</sup>	ion hypochlorite	7,5
Ion dihydrogénophosphate	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	HPO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	ion hydrogénophosphate	7,2
Sulfure d'hydrogène	H <sub>2</sub> S	HS <sup>-</sup>	ion hydrogénosulfure	7,0
Dioxyde de carbone	CO <sub>2(aq)</sub>	HCO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	ion hydrogénocarbonate	6,4
Acide éthanoïque	CH <sub>3</sub> COOH	CH <sub>3</sub> COO <sup>-</sup>	ion éthanoate	4,8
Ion hydrogénéoxalate	HC <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>-</sup>	C <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>2-</sup>	ion oxalate	4,2
Acide benzoïque	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COOH	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> COO <sup>-</sup>	ion benzoate	4,2
Acide nitreux	HNO <sub>2</sub>	NO <sub>2</sub>	ion nitrite	3,4
Fluorure d'hydrogène	HF	F <sup>-</sup>	ion fluorure	3,2
Acide phosphorique	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	H <sub>2</sub> PO <sub>4</sub>	ion hydrogénophosphate	2,1
Acide sulfureux	H <sub>2</sub> SO <sub>3</sub>	HSO <sub>3</sub> <sup>-</sup>	ion hydrogénosulfite	1,8
Acide oxalique	H <sub>2</sub> C <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	HC <sub>2</sub> O <sub>4</sub> <sup>-</sup>	ion hydrogénéoxalate	1,24

## 2. Potentiels standards redox

(à 25 °C, 1,013 bar, pH=0)

Couples redox	$E_0$ (V)
$\text{MnO}_4^- + 4\text{H}^+ + 3e^- = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$	1,700
$\text{MnO}_4^- + 8\text{H}^+ + 5e^- = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$	1,490
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6e^- = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$	1,330
$\text{MnO}_2 + 4\text{H}^+ + 2e^- = \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$	1,230
$\text{Br}_2 + 2e^- = 2\text{Br}^-$	1,090
$\text{Hg}^{2+} + 2e^- = \text{Hg}$	0,850
$\text{Ag}^+ + e^- = \text{Ag}$	0,798
$\text{Hg}^+ + e^- = \text{Hg}^-$	0,790
$\text{Fe}^{3+} + e^- = \text{Fe}^{2+}$	0,780
$\text{MnO}_4^- + e^- = \text{MnO}_4^{2-}$	0,560
$\text{I}_2 + 2e^- = 2\text{I}^-$	0,540
$\text{Cu}^{2+} + 2e^- = \text{Cu}$	0,340
$\text{Cu}^{2+} + e^- = \text{Cu}^+$	0,150
$2\text{H}^+ + 2e^- = \text{H}_2$	0,000
$\text{Fe}^{3+} + 3e^- = \text{Fe}$	-0,040
$\text{Pb}^{2+} + 2e^- = \text{Pb}$	-0,120
$\text{Sn}^{2+} + 2e^- = \text{Sn}$	-0,140
$\text{Fe}^{2+} + 2e^- = \text{Fe}$	-0,441
$\text{Zn}^{2+} + 2e^- = \text{Zn}$	-0,762
$\text{Mn}^{2+} + 2e^- = \text{Mn}$	-1,180
$\text{Al}^{3+} + 3e^- = \text{Al}$	-1,660
$\text{Na}^+ + e^- = \text{Na}$	-2,715
$\text{Ca}^{2+} + 2e^- = \text{Ca}$	-2,763
$\text{Ba}^{2+} + 2e^- = \text{Ba}$	-2,900
$\text{K}^+ + e^- = \text{K}$	-2,924

### 3. Zone de virage des principaux indicateurs colorés

Indicateur coloré	Zone de virage	Acide	Base
Bleu de thymol (1 <sup>er</sup> virage)	1, 2-2, 8	rouge	jaune
Bleu de bromophénol	3, 0-4, 6	jaune	bleu
Rouge de méthyle	4, 2-6, 2	rouge	jaune
Bleu de bromothymol	6, 0-7, 6	jaune	bleu
Rouge de phénol	6, 4-8, 0	jaune	rouge
Bleu de thymol (2 <sup>e</sup> virage)	8, 0-9, 6	jaune	bleu
Phénolphtaléine	8, 0-9, 9	incolore	rose

## Index des mathématiques

- accroissements finis
  - égalité, 14
  - inégalité, 14
- anneau, 45
  - intègre, 45
- application linéaire, 56
- argument, 41
- arrangement, 68
- automorphisme, 56
  
- Bézout (relation de), 47
- Bézout (théorème de), 52
- base, 53
- base adaptée, 56
- Bayes (formule de), 70
- Bessel, 65
- Bienaymé-Tchebychev (inégalité de), 72
- borne supérieure, 12
  
- Cauchy-Schwarz, 64, 73
- Cayley-Hamilton (théorème de), 63
- chinois (théorème), 48
- classe d'équivalence, 40
- coefficient de corrélation, 74
- coefficients binomiaux, 40
- combinaison, 69
- combinaison linéaire, 52
- compact, 28
- comparaison série-intégrale, 30
- conjugué, 41
- connexe par arcs, 29
- continuité
  - uniforme, 28
- convergence
  - absolue, 29
  - dominée, 18
  - normale, 33
  - simple, 32, 33
  - uniforme, 32, 33
- corps, 45
  
- covariance, 73
- cycle, 44
  
- d'Alembert (règle de), 30
- d'Alembert-Gauss (théorème de), 49
- dense (partie), 12
- déterminant, 60
- développement limité, 21
- diagonalisable, 62
- différentielle, 36
- dimension, 54
- diviseur de zéro, 45
- divisibilité, 46
- division euclidienne, 46, 49
  
- écart type, 71
- encadrement (th. d'), 15
- endomorphisme, 56
- équation différentielle
  - premier ordre, 22
  - second ordre, 22
- espace euclidien, 64
- espace vectoriel, 52
- espérance, 71
- Euclide (algorithme d'), 47, 51
- Euler, 41
- Euler (indicatrice d'), 48
- Euler (théorème d'), 48
- événement, 69
- exponentielle d'une matrice, 25
- extrémum, 38
  
- famille
  - génératrice, 53
  - libre, 53
  - sommable, 31
- fermé, 27
- Fermat (petit théorème), 49
- fonction
  - continue, 12
  - contractante, 28

- dérivable, 13
- génératrice, 76
- indicatrice d'une partie, 39
- intégrable, 17
- lipchitzienne, 28
- formule du binôme, 40, 59
- frontière, 27
  
- Gauss (lemme de), 47
- Gauss (théorème de), 52
- gradient, 37
- Grassmann (relation de), 55
- groupe, 42
  - cyclique, 44
  - monogène, 43
  - symétrique, 44
  
- Hölder (inégalité de), 15
- hyperplan, 66
  
- idéal, 46, 51
- image, 43
  - d'une application linéaire, 56
  - directe, 39
  - réciroque, 39
- inégalité
  - de Hölder, 15
  - de Minkowski, 15
- indépendance
  - événements, 70
  - v.a., 72
- indicatrice d'Euler, 48
- injection, 39
- intégration
  - par changement de variable, 17
  - par parties, 17
- intérieur, 27
- isométrie vectorielle, 66
- isomorphisme, 56
  
- Kronecker (symbole de), 58
  
- Lagrange (polynôme d'interpolation), 50
- Lagrange (théorème de), 44
  
- lemme d'Abel, 34
- limite monotone, 16
- loi
  - de composition interne, 42
  - de probabilité, 71
  - binomiale, 74, 76
  - de Bernoulli, 74, 76
  - de Poisson, 75, 76
  - faible des grands nombres, 76
  - géométrique, 75, 76
  - uniforme discrète, 74
- lois conditionnelles, 72
  
- Markov (inégalité de), 71
- matrice, 58
  - de passage, 59
  - inversible, 59
  - jacobienne, 37
  - orthogonale, 66
  - par blocs, 59
  - triangulaire, 59
- matrices semblables, 60
- Minkowski (inégalité de), 15
- module, 41
- Moivre (formule de), 41
- moment d'ordre  $k$ , 73
- morphisme
  - d'anneaux, 45
  - de groupes, 43
- moyenne (inégalité), 16
  
- nilpotent, 62
- nombre premier, 46
- norme, 26
- normes équivalentes, 26
- noyau, 43, 56
  
- ouvert, 27
  
- partie
  - compacte, 28
  - dense, 27
  - fermée, 27
  - ouverte, 27
- partition, 38

- pgcd, 46, 51
- plan tangent, 38
- plus petit élément, 12
- point
  - critique, 38
  - stationnaire, 38
- polynôme
  - annulateur, 63
  - caractéristique, 62
  - d'interpolation, 50
  - minimal, 63
- ppcm, 47, 51
- probabilités
  - composées, 70
  - conditionnelles, 69
  - totales, 70
- probabilité, 69
- produit de Cauchy, 31
- produit scalaire, 63
- projecteur, 57
- projection orthogonale, 65
  
- racine, 49
- racines n-ièmes, 42
- rang, 55
- rang (théorème du), 57
- rayon de convergence, 34
- recouvrement, 38
- relation
  - binaire, 39
  - d'équivalence, 40
- Riemann
  - série, 30
  - sommes, 17
- Rolle (théorème de), 13
  
- Schmidt, 65
- Schwarz (théorème de), 38
- série, 29
  - alternée, 31
  - de Riemann, 30
  - entière, 34
  - exponentielle, 30
  - géométrique, 30
  - harmonique, 30
- signature d'une permutation, 44
- sommable (famille), 31
- sommation  $L^1$ , 19
- somme directe, 55
- sous-anneau, 45
- sous-corps, 45
- sous-groupe, 42
  - engendré, 43
- spectre, 61
- suite
  - convergente, 15
  - extraite, 15
- suites adjacentes, 16
- supplémentaire orthogonal, 65
- surjection, 39
- symétrie, 57
- système différentiel, 24
- système fondamental de solutions, 25
  
- Taylor (reste intégral), 17
- Taylor-Young (formule de), 20
- théorème
  - d'Euler, 48
- trace, 60
- transformation de Laplace, 20
- transposée, 59
  
- valeur propre, 61
- valeurs intermédiaires, 12, 29
- valuation p-adique, 48
- Vandermonde (déterminant de), 61
- variance, 71
- variation de la constante, 24
- vecteur propre, 61
- voisinage, 26
  
- wronskien, 25

## Index de la physique

- A.L.I., 103  
 accélération  
     d'entraînement, 145  
     de Coriolis, 145  
     de la pesanteur, 146  
 adhérence, 133  
 adiabatique, 155, 157  
 aimant, 165  
 Ampère (théorème d'), 184  
 Andrews (isotherme d'), 155  
 Archimède (poussée d'), 133, 163  
 association  
     d'impédances, 99  
     de générateurs, 96  
     de résistances, 96  
 auto-induction, 166, 167  
 Avogadro-Ampère (loi de), 153  
  
 bobine, 95, 97, 98  
 bobine infinie, 164  
 bobines en interaction, 167  
 Bode (diagramme de), 100  
 Boyle-Mariotte (loi de), 153  
  
 capacité thermique molaire, 214  
 célérité, 195  
 chaîne  
     de retour, 105  
     directe, 105  
 champ  
     de gravitation, 179  
     magnétique, 164  
 changement d'état, 154, 158  
 chemin optique, 121  
 cinématique, 128, 131  
 circuit  
     LC, 98  
     RC, 97  
     RL, 97, 98  
     RLC, 98  
 Clausius (inégalité de), 159  
  
 comparateur  
     à hystérésis négative, 107  
     à hystérésis positive, 108  
     simple, 106  
 condensateur, 95, 97, 178  
 conductivité, 198  
 conversion de puissance, 168  
 coordonnées  
     cartésiennes, 129  
     cylindriques, 129  
     sphériques, 130  
 Coulomb (loi de), 133, 147  
 couplage, 167  
 couple, 139  
     magnétique, 166  
 courant de Foucault, 168  
  
 déphasage, 120  
 détection  
     photonique, 124  
     thermique, 124  
 De Broglie (relation de), 207  
 densité  
     de probabilité, 209  
     linéique, 203  
     particulaire, 163  
     volumique de courant, 198  
 Descartes (loi de), 116, 117  
 diagramme  
     d'Andrews, 155  
     d'état, 154  
     de Bode, 100  
 diagrammes, 154  
 différence de marche, 125  
 diffraction, 93  
 diode électroluminescente, 123  
 dipôle magnétique, 186  
 dispersion angulaire, 126  
 diviseur  
     de courant, 96  
     de tension, 96

- durée de cohérence, 122
- dynamique, 132, 136, 137
- éclairage énergétique, 123
- effet
  - de peau, 201
  - tunnel, 212
- efficacité
  - d'un récepteur, 160
  - frigorigène, 160
  - thermique, 160
- énergie
  - cinétique, 89, 134, 138
  - interne, 157
  - interne molaire, 216
  - mécanique, 90, 135, 142
  - moyenne, 214
  - potentielle, 90, 135, 140, 167
- enthalpie, 158
- entropie, 158
- équation d'état, 154
- équilibre, 136
- équipartition de l'énergie, 215
- état de diffusion, 141
- état lié, 141
- étude du signal, 89
- excitation énergétique, 123
- facteur
  - de Boltzmann, 163
  - de contraste, 125
  - de qualité, 98
- facteur  $\beta$ , 213
- facteur de Boltzmann, 213
- Faraday (loi de), 166
- filtrage numérique, 113
- filtre
  - passes-bande, 101
  - passes-bas, 101
  - passes-haut, 101
- flux, 166, 168
  - énergétique, 123
  - propre, 167
- fonction
  - de partition, 213
  - de transfert, 102
- force
  - centrale, 140
  - de Coulomb, 172
  - de Laplace, 165
  - de Lorentz, 136
  - de pesanteur, 162
  - de pression, 162
  - électromotrice, 166, 167
  - pressante, 153
  - surfactive, 162
  - volumique, 162
- forces
  - de Debye, 183
  - de Keesom, 183
  - de London, 183
  - de Van der Waals, 183
- formule
  - d'échantillonnage, 112
  - de Fresnel, 125
  - des réseaux, 126
- franges
  - d'égale épaisseur, 128
  - d'égale inclinaison, 127
- Fresnel (formule de), 125
- frottement
  - de glissement, 147
  - solide, 147
- gain, 100
- Gauss (théorème de), 177
- Gay-Lussac et Charles (loi de), 153
- gaz parfait, 154
- générateur, 95, 96
- glissement, 133
- grandissement
  - de Descartes, 117
  - de Newton, 118
- haut-parleur, 168
- impédance, 99
  - acoustique, 206
- indice de réfraction, 116
- inductance

- mutuelle, 167
  - propre, 167
- induction, 164, 166
- inégalité de Clausius, 159
- intensité du courant, 93
- intensité sonore, 206
- interaction
  - électrostatique, 140
  - gravitationnelle, 140
- interférence, 125, 126
- interféromètre de Michelson, 127
- interférences, 92
- isobare, 155
- isochore, 155
- isotherme, 155
  
- Kepler (loi de), 142
- Kirchhoff (loi de), 93
  
- lampe spectrale, 123
- Laplace (force de), 165
- Laplace (loi de), 157
- laser, 123
- lentille
  - convergente, 120
  - divergente, 120
- lentilles minces, 117
- Lenz (loi de), 166
- liaison pivot, 139
- loi
  - d'Avogadro-Ampère, 153
  - d'Ohm, 94
  - de Boyle-Mariotte, 153
  - de conservation de l'énergie mécanique, 142
  - de conservation du moment cinétique, 141
  - de Coulomb, 133, 147
  - de Descartes, 116, 117
  - de Dulong et Petit, 216
  - de Faraday, 166
  - de Gay-Lussac et Charles, 153
  - de Kepler, 142
  - de Kirchhoff, 93
  - de l'énergie cinétique, 134
  - de l'énergie cinétique solide, 138
  - de l'énergie mécanique, 135
  - de la puissance cinétique, 134
  - de la quantité de mouvement, 133
  - de Laplace, 157
  - de Lenz, 166
  - de Newton, 132
  - de Pouillet, 94
  - des aires, 141
  - des mailles, 93
  - des nœuds, 93
  - du moment cinétique, 139
  
- machine
  - thermique, 159
- Malus (théorème de), 120
- Maxwell (équations de), 174, 184
- Michelson (interféromètre de), 127
- milieu
  - conducteur ohmique, 200
  - de propagation, 118
  - homogène, 118
  - isotrope, 118
  - linéaire, 118
- Millmann (théorème de), 106
- modèle d'Einstein, 216
- moment
  - cinétique, 137–139, 141
  - d'inertie, 137, 138
  - d'une force, 139
  - dipolaire, 180
  - magnétique, 164, 186
- monobare, 155
- monochromatique, 119
- monochromatisme, 122
- monotherme, 155
- mouvement
  - circulaire, 131, 142
  - dans un champ électrostatique, 136
  - dans un champ magnétostatique, 137
  - des planètes, 142

- rectiligne, 130
- Newton (loi de), 132
- niveau sonore, 206
- Norton, 95, 96
- Ohm (loi de), 94
- onde
  - lumineuse, 93
  - mécanique, 92
  - plane, 119
    - progressive, 91
    - sinusoïdale, 91
  - sphérique, 119
  - stationnaire, 92
- ondes
  - acoustiques, 204
  - sur une corde, 203
- optique géométrique, 116
- oscillateur, 109
  - amorti, 98, 99, 135
  - non amorti, 89, 98, 135
- particule libre, 211
- pendule
  - pesant, 140
  - simple, 99, 133
- période, 142
- plan
  - équiphase, 119
  - d'onde, 119
- planètes, 142
- Planck-Einstein (relation de), 207
- Poisson (équation de), 175
- pont de Wien, 109
- portrait de phase, 135
- potentiel
  - de gravitation, 179
  - électrostatique, 175
- Pouillet (loi de), 94
- poussée d'Archimède, 133, 163
- pouvoir de résolution, 118, 126
- Poynting (théorème de), 196
- Poynting (vecteur), 195
- premier principe, 157
- pression, 153
- principe
  - d'inertie, 132
  - des actions réciproques, 132
  - fondamental de la dynamique, 132
- probabilité d'occupation, 213
- puissance, 94, 134, 136
  - mécanique, 156, 204
  - thermique, 156
- pulsation de plasma, 199
- quantification de l'énergie, 208
- quantité de mouvement, 132, 133
- quasi statique, 155
- quasi-monochromatisme, 122
- rails de Laplace, 168
- réaction positive, 107
- référentiel, 128, 132
- réflexion, 116
- réflexion totale, 117
- réfraction, 117
- régime libre, 98
- relation
  - de De Broglie, 207
  - de Descartes, 117
  - de dispersion, 199, 203
  - de Newton, 118
  - de Planck-Einstein, 207
- rendement
  - d'un moteur, 159
  - quantique, 124
- repliement du spectre, 112
- réseau de diffraction, 126
- ressort, 89, 99
- rétroaction, 104
- réversible, 155
- rotation, 131
- satellite, 143
- second principe, 158
- sensibilité
  - globale, 124
  - spectrale, 124

Shannon (théorème de), 112

signal

acoustique, 90

électrique, 90

électromagnétique, 91

solide, 137

source thermique, 123

spire, 165

stabilité, 102, 136

statique des fluides, 162, 164

Stokes (théorème de), 175

système, 153

système linéaire, 102

temps de réponse, 124

tension électrique, 93

théorème

d'Ampère, 184

de Gauss, 177

de Malus, 120

de Millmann, 106

de Poynting, 196

théorème de Carnot, 160

théorèmes des moments, 155

Thévenin, 95, 96

transfert thermique, 155, 156

translation, 131

travail, 134, 155, 156, 167

trous d'Young, 126

tube fluorescent, 123

valeur efficace, 100

valeur moyenne, 100

vecteur de Poynting, 195

vitesse

cosmique, 143

de groupe, 200

de libération, 143

de phase, 199

de propagation, 200

en orbite basse, 143

Young (trous d'), 126

## Index de la chimie

- activité (chimique), 230  
 AECD, 242  
 AEQS, 241  
 alliage, 250  
 approximation  
   de l'étape cinétiquement dé-terminante, 242  
   de l'état quasi stationnaire, 241  
 Arrhenius (loi d'), 240  
 avancement  
   molaire, 229  
   volumique, 229
- catalyseur, 242  
 charge formelle, 246  
 cinétique  
   formelle, 238  
 classification périodique, 242  
 compacité, 249  
 configuration électronique, 244  
 constante  
   d'acidité, 255  
   de basicité, 255  
   de dissociation successive, 256  
   de formation successive, 256  
   d'équilibre, 230  
   diélectrique, 248  
   globale de dissociation, 256  
   globale de formation, 255  
 constituant physico-chimique, 227  
 coordinence, 249  
 corrosion, 260  
 courbe intensité - potentiel, 258  
 cristal  
   covalent, 250  
   ionique, 250  
   métallique, 250  
   moléculaire, 251  
   parfait, 248  
 critère d'évolution, 230, 237  
 cubique faces centrées, 249
- Dalton (loi de), 229  
 Debye (interaction de), 247  
 dégénérescence de l'ordre, 240  
 degré d'oxydation, 251  
 diagramme  
   d'état, 226  
   d'existence, 257  
   de prédominance, 255, 257  
   potentiel-pH, 257, 258, 260  
   solide-liquide, 231
- électrode standard à hydrogène, 252  
 électronégativité, 245  
 électrons  
   de cœur, 244  
   de valence, 244  
 enthalpie libre, 234  
 enthalpie libre de réaction, 234  
 enthalpie standard  
   de formation, 233  
   de réaction, 233  
 ESH, 252  
 évolution d'un équilibre, 236, 237
- formule  
   de Nernst, 252
- gaz parfait, 229  
 Gibbs (règle de), 231  
 grandeurs de réaction, 233
- Hess (loi de), 233  
 Hund (règle de), 244
- identités thermodynamiques, 234  
 interaction  
   de Debye, 247  
   de Keesom, 247  
   de London, 247  
   de Van der Waals, 247
- Keesom (interaction de), 247

- Klechkowski (règle de), 244
- liaison hydrogène, 247
- loi
- d'Arrhenius, 240
  - d'action des masses, 230
  - de Dalton, 229
  - de Guldberg et Waage, 230
  - de Hess, 233
  - de Van't Hoff, 241
- London (interaction de), 247
- maille, 248
- mécanisme réactionnel
- cinétique, 241
- mésomérie, 246
- moment dipolaire, 246
- Nernst (formule de), 252
- nombre quantique, 243
- oxydo-réduction, 251
- Pauli (principe d'exclusion de), 244
- permittivité électrique relative, 248
- pH, 254, 255
- pile, 253, 261
- pL, 256
- potentiel
- chimique, 235
  - mixte, 260
  - thermodynamique, 234
- premier principe, 233
- principe
- d'exclusion de Pauli, 244
  - de Bodenstein, 241
- produit ionique de l'eau, 254
- protection, 260
- quantification de l'énergie, 242, 243
- quotient de réaction, 230, 235, 236
- rayons, 245
- réaction
- acido-basique, 254
  - de complexation, 255
  - de précipitation, 257
- règle
- de Gibbs, 231, 237
  - de Hund, 244
  - de Klechkowski, 244
  - de l'octet, 245
  - du duet, 245
- relation de Van't Hoff, 237
- second principe, 234
- sites interstitiels, 249
- solide, 225
- solubilité, 257
- solution idéale, 231
- solvant, 248
- spectre électromagnétique, 244
- système physico-chimique, 227
- temps
- de demi-réaction, 239
  - de demi-vie, 239
- théorème des moments, 232
- transformation de la matière, 225
- Van der Waals (interactions de), 247
- Van't Hoff, 237, 241
- variance, 231
- variété allotropique, 225
- vitesse de réaction, 258